BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIŞOARA

SERIA

MATEMATICA — FIZICA — MECANICA TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

Tomul 17 (31) Fascicola 1

IANUARIE — IUNIE
1 9 7 2

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIŞOARA

MATEMATICĂ–FIZICĂ–MECANICĂ TEORETICĂ
ŞI APLICATĂ

Tomul 17(31) Fascicola 1

IANUARIE—IUNIE
1972

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
7414
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

P209/A575

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. dr. ing. *Gh. Silaș* (redactor șef), prof. ing. *Constantin Avram*, m. c. al Academiei R.S.R., prof. dr. ing. *I. Anton*, m. c. al Academiei R.S.R., prof. dr. ing. *M. Borneas*, prof. dr. ing. *M. Brașovan*, prof. ing. *V. Cocheci*, academician prof. dr. doc. *C. Drăgulescu*, prof. dr. *O. Em. Gheorghiu*, prof. ing. *V. Gheorghiu*, prof. ing. *Gh. Savii*, prof. ing. *D. Mateescu*, prof. dr. ing. *I. Novac*.

MŰSZAKI EGYETEM 1948

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. dr. *O. Em. Gheorghiu* (redactor responsabil), prof. dr. ing. *M. Borneos* (redactor responsabil adjunct) prof. dr. ing. *Gh. Silaș*, prof. dr. *B. Cristici*, prof. dr. *C. Simoiu*, conf. dr. ing. *I. Groșanu* și conf. dr. ing. *L. Brîndeu* (secretar de redacție).

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC TIMIȘOARA

SERIA MATEMATICĂ—FIZICĂ—MECANICĂ
TEORETICĂ ȘI APLICATĂ

Tomul 17 (31) Fascicola 1 Ianuarie—iunie 1972

SUMAR

O. E. GHEORGHIU, L. BRINDEU, Asupra ecuațiilor diferențiale ale curbelor algebrice plane și asupra ecuațiilor cu derivate parțiale ale suprafețelor algebrice 9

T. BANZARU Aplicațiile multivoce și spațiile m-produs 17

N. BOJA. Relații metrice pe hipersfere pseudoeuclidiene 25

E. BURLACU Inversa generalizată a unei matrici booleene 33

P. N. IZVERCIANU, Funcții intrinseci pe algebre polinomiale ... 41

C. SIMOI, P. CRĂCIUN, I. COTĂESCU, Influența desorbției gazoase asupra emisiei exoelectronice 47

O. SLIMAC, Generalizarea ecuației funcționale a lui D'Alembert — D. V. Ionescu în ipoteza unor dependențe date între argumente 53

GH. SILAȘ, I. NICHITA, I. GROSANU, Dinamica ridicării sarcinii la un pod rulant 61

L. BRINDEU, Metodă directă folosită pentru determinarea condițiilor de stabilitate ale mișcărilor periodice în cazul sistemelor vibropercutante 69

I. GROSANU, Studiul regimurilor staționare apropiate de rezonanță ale unui vibrator inerțial 75

I. N. CONSTANTINESCU, A. V. DARABONT, Asupra dinamicii punctului material cu caracteristici discontinuu variabile 81

GH. SILAȘ, L. BRINDEU, Asupra compunerii accelerațiilor de ordin superior în mișcarea relativă 91

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ БЮЛЕТЕНЬ
ТИМИШОРСЬКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Им. «ТРАЯН ВУЯ»

МАТЕМАТИКА — ФИЗИКА — ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Том 17(31) Выпуск 1. Январь—июнь 1972

СОДЕРЖАНИЕ

О. Е. ГЕОРГИУ, Л. БРЫНДЕУ, О дифференциальных уравнениях алгебраических плоских кривых и уравнениях с частными производными алгебраических поверхностей 9

Т. БЫНЗАРУ, Многозначные отображение и M-произведение пространства 17

Н. БОЖА, Метрические отношения на псевдоевклидовых гиперсферах 25

Е. БУРЛАКУ, Обобщенная обратная матрица для булевской матрицы 33

П. Н. ИЗВЕРЧАНУ, Внутренние функции в многочленной алгебре 41

К. СИМОН, П. КРЭЧИУН, И. КОТАЕСКУ, Влияние газовой десорбции на эксо-электронную 47

Г. СИЛАШ, И. НИКИТА, И. ГРОШАНУ, Динамика подъёма груза на мостовом кране 61

Л. БРЫНДЕУ, Прямой метод определения условий устойчивости периодических движений виброударных систем 59

И. ГРОШАНУ, Исследование стационарных режимов вблизи резонанской области инерциального вибратора 75

И. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, А. В. ДАРАБОНТ, В связи с динамической материальной точки с прерывистыми изменяющими характеристиками 81

Г. СИЛАШ, Л. БРЫНДЕУ, К сложению ускорений высшего порядка в относительном движении 91

BULLETIN SCIENTIFIQUE ET TEHNIQUE
DE
L'INSTITUT POLYTECHNIQUE DE TIMIŞOARA
SÉRIE MATHÉMATIQUE-PHYSIQUE-MÉCANIQUE ET APPLIQUÉE
Tome 17 (31) Fascicule 1 Janvier—Juin 1972

SOMMAIRE

O. E. GHEORGHIU, L. BRINDEU, Über die Differentialgleichungen der ebenen algebraischen Kurven und über die partiellen Differentialgleichungen der algebraischen Flächen ... 9

T. BANZARU, Mehrdeutige Abbildungen und M-Produkträume ... 17

N. BOJA, Metric relations on psudo-euclidean hyperspheres 25

E. BURLACU· Die verallgemeinerte Inverse einer Booleschen Matrir 33

P. N. IZVERCIANU, Naturliche Funktionen (intrinsec functions) Polynomialalgebren 41

C. SIMON, P. CRĂCIUN, I. COTĂESCU, The Influence of the Gas Desorption on the Exoelectronical Emission 47

O. SLIMAC, La generalisation de l'équation fontionnelle de D'Alembert — D. V. Ionescu dans l'hypotèse de quelques dépendences donneés entre les arguments 53

GH. SILAS, I. NICHITA, I. GROSANU, The Dynamics of Raising the Weight on an Owerhead Travelling-Crane 61

L. BRINDEU, The Direct Method Used for the Determination of Stability Conditions of Periodical Movements in the Case of Shock-Vibration Systems 69

I. GROSANU, The Study of Steady States near by the Resonance Domain of an Inertial Vibrator 75

I. N. CONSTANTINESCU, A. V. DARABONT, Sur la dynamique du point matérial aux caractéristiques discontinument variables 81

GH. SILAS, L. BRINDEU, About the Addition of High Order Accelerations in the Relative Movement 91

PROFESORUL CONSULTANT VASILE MIOC

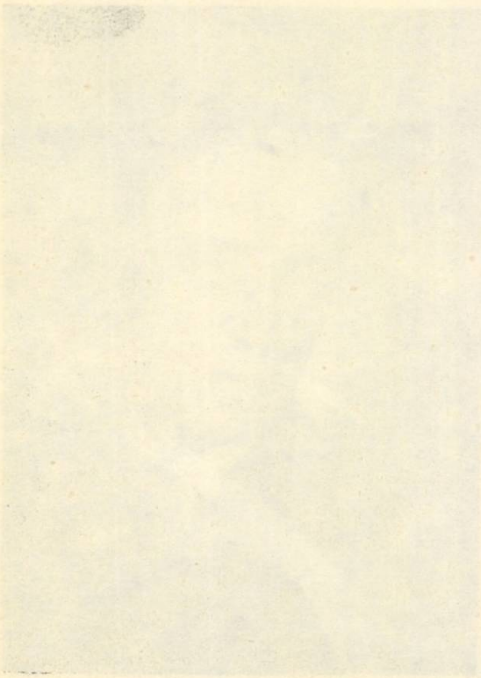
— La sărbătorirea a 70 de ani —

La 26 decembrie 1971 profesorul consultant Vasile Mioc a împlinit 70 de ani. Sărbătorirea festivă în cadrul Institutului politehnic „Traian Vuia" din Timişoara a avut loc în ziua de 4 ianuarie 1972.

Profesorul consultant Vasile Mioc s-a născut în comuna Ciuchici, judeţul Caraş-Severin. A terminat matematicile la Universitatea din Cluj (1921—1924). Din anul 1922 a intrat în învăţămînt şi a slujit 49 de ani la catedră, atît la licee cît şi la institute de învăţămînt superior. Din anul 1927 pînă la data pensionării — 1 octombrie 1971 — a depus la Institutul politehnic o bogată activitate, ştiinţifică şi educativă cu studenţii. Pentru activitatea sa i s-a conferit Ordinul Muncii clasa a III-a.

Colegii şi elevii, în semn de deosebit omagiu şi recunoştinţă, îi închină acest volum.

COMITETUL DE REDACŢIE



ASUPRA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ALE CURBELOR ALGEBRICE PLANE ȘI ASUPRA ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE ALE SUPRAFEȚELOR ALGEBRICE.

DE

OCT., EM. GHEORGHIU, L. BRÎNDEU

Omagiu profesorului V. Mioc cu ocazia celei de a 70-a aniversări.

Curbele algebrice plane ca și suprafețele algebrice au aceeași exprimare, pentru ecuațiile lor analitice : un polinom în două sau mai multe variabile egalat cu zero. Din cauza acestei asemănări între ecuațiile lor s-a căutat să se prezinte o metodă unitară pentru stabilirea ecuațiilor diferențiale respectiv a ecuațiilor cu derivate parțiale ale curbelor algebrice plane și ale suprafețelor algebrice (sau ale hipersuprafețelor algebrice în spațiile cu mai mult de 3 dimensiuni)

1. Se consideră familia hipersuprafețelor de gradul m din spațiul cu n dimensiuni :

$$\sum_{i,j,\ldots s} a_{ij\ldots s}\, x_i x_j \ldots x_s = 0 \tag{1}$$

cu : $i,j,\ldots, s \leqslant n$, $(0,1,2,\ldots,n)$; $x_0 = 1$,
care se poate considera că definește pe x_n drept funcție de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Se va determina ecuația cu derivate parțiale care admite familia de hipersuprafețe (1) ca o integrală completă. Pentru aceasta se vor elimina coeficienții $a_{ij\ldots s}$ între ecuația (1) și primele sale derivate în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, pînă la un ordin ce se va preciza mai jos ; ceea ce va duce tocmai la ecuația cu derivate parțiale căutată.

Ecuația familiei de hipersuprafețe (1) are în total K^m_{n+1} coeficienți sub formă omogenă. Numărul derivatelor de ordinul t este K^t_{n-1} ; ceea ce înseamnă că sînt în total :

$$1 + K^1_{n-1} + K^2_{n-1} + \ldots + K^t_{n-1}$$

relații între care trebuie să se facă eliminarea. Astfel cel mai mare ordin de derivare t se obține din ecuația :

$$1 + K^1_{n-1} + K^2_{n-1} + \ldots + K^t_{n-1} = K^m_{n+1}$$

care se reduce la :

$$C^t_{t+n-1} = C^m_{m+n} \tag{2}$$

Buletin științific și tehnic al Institutului politehnic Timișoara Tom. 17(31) fasc 1/1972.

Se observă însă că, în derivatele de ordinul $m+1$ și următoarele ale ecuației (1), termenii care nu conțin pe x_n dispar. Astfel vor dispare din aceste relații $K_n^m = C_{m+n-1}^m$ coeficienți, însă numărul relațiilor obținute lăsînd la o parte derivatele de ordinul $m+1$ și următoarele este:

$$1 + K_{n-1}^1 + K_{n-1}^2 + \ldots + K_{n-1}^m = K_n^m$$

Rezultă deci că se poate simplifica problema lăsînd la o parte ecuația (1) și primele derivate pînă la ordinul m inclusiv.

Ecuația familiei de hipersuprafețe (1) se mai poate scrie

$$\sum_{\alpha,\beta,\ldots\lambda,\mu} b_{\alpha\beta\ldots\lambda\mu} x_0^\alpha x_1^\beta \ldots x_{n-1}^\lambda x_n^\mu = 0$$

cu

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + \mu = m, \quad x_0 = 1$$

unde

$$b_{\alpha\beta\ldots\lambda\mu} = \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta \ldots P_\lambda P_\mu} a_{\underbrace{00\ldots0}_{\alpha}, \underbrace{11\ldots1}_{\beta}, \ldots, \underbrace{nn\ldots n}_{\mu}}; \quad (P_n = n!)$$

Se obține deci sistemul de ecuații liniare și omogene în raport cu coeficienții

(în număr de $K_{n+1}^m - K_n^m = K_{n+1}^{m-1} = C_{m+n-1}^{m-1}$)

$$F_{\beta_1\gamma_1\ldots\lambda_1} = \sum_{\substack{\alpha,\beta,\ldots\lambda,\mu \\ \beta_1+\gamma_1+\ldots\lambda_1 = m+h, \quad h=1,2,\ldots,(t-m)}} b_{\alpha\beta\ldots\lambda\mu} \frac{\partial^{(m+h)}(x_0^\alpha x_1^\beta \ldots x_{n-1}^\lambda x_n^\mu)}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\gamma_1} \ldots \partial x_{n-1}^{\lambda_1}} = 0 \tag{4}$$

care trebuie să admită pentru coeficienți soluții nu toate nule, rezultă că determinantul sistemului trebuie să fie nul

$$D_{\alpha,\beta,\ldots\lambda,\mu;\,\beta_1,\gamma_1,\ldots,\lambda_1} = \left| \frac{\partial^{(m+h)}(x_0^\alpha x_1^\beta \ldots x_{n-1}^\lambda x_n^\mu)}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\gamma_1} \ldots \partial x_{n-1}^{\lambda_1}} \right| = 0 \tag{5}$$

sau simbolic:

$$\frac{D^{(m+h)}(x_0^\alpha x_1^\beta \ldots x_{n-1}^\lambda x_n^\mu)}{D(x_1^{\beta_1} x_2^{\gamma_1} \ldots x_{n-1}^{\lambda_1})} = 0 \tag{5'}$$

unde

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + \mu = m; \qquad \mu \geqslant 1$$

$$\beta_1 + \gamma_1 + \ldots + \lambda_1 = m + h \qquad h = 1, 2, \ldots, (t+m)$$

$$x_0 = 1$$

După cum se observă ecuația (5) reprezintă tocmai ecuația cu derivate parțiale căutată, în cazul cînd nu se reduce la o identitate. Pentru cazul cînd ecuația (5) este identic nulă se presupune că matricea:

$$\left\| \frac{\partial^{(m+h)}(x_0^\alpha x_1^\beta \ldots x_{n-1}^\lambda x_n^\mu)}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\gamma_1} \ldots \partial x_{n-1}^{\lambda_1}} \right\| \tag{6}$$

este de rang p.

Prin egalare cu zero a tuturor determinanților de ordin p, se obține sistemul de ecuații cu derivate parțiale, care admite ca integrală completă familia de hipersuprafețe (1). Dacă acest sistem admite un cel mai mare divizor comun, acesta egalat cu zero dă ecuația cu derivate parțiale căutată.

Din prezentarea de mai sus avem următorul rezultat: Ecuația cu derivate parțiale ale unei familii de hipersuprafețe algebrice ce se obține egalînd cu zero determinanții de ordin C_{m+n-1}^{m-1} ale cărui elemente sînt derivatele parțiale de ordinul $(m+h)$ a termenilor din ecuația hipersuprafețelor date. Dacă acest determinant este identic nul se egalează cu zero toți determinanții de ordinul cel mai mare p, care nu sînt identici nuli, scoși din matricea funcțională (6).

2. Foarte simplu se găsește pe această cale ecuația diferențială a conicelor stabilită de Halphen [1].

Pentru aceasta se consideră ecuația conicelor

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 ; \quad (i,j=0,1,2) \tag{7}$$

Derivata de ordin maxim ce trebuie folosită va fi dată de ecuația

$$C_{t+1}^{t} = C_4^2,$$

a cărei soluție este: $t=5$

Ecuația (5) va fi în acest caz:

$$\frac{D^{(3+h)}(x_2^2,\ x_1x_2,\ x_2),}{D(x_1^3,\ x_1^4,\ x_1^5)} = \begin{vmatrix} \dfrac{d^3(x_2^2)}{dx_1^3} & \dfrac{d^3(x_1x_2)}{dx_1^3} & \dfrac{d^3x_2}{dx_1^3} \\ \dfrac{d^4(x_2^2)}{dx_1^4} & \dfrac{d^4(x_1x_2)}{dx_1^4} & \dfrac{d^4x_2}{dx_1^4} \\ \dfrac{d^5(x_2^2)}{dx_1^5} & \dfrac{d^5(x_1x_2)}{dx_1^5} & \dfrac{d^5x_2}{dx_1^5} \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

sau dezvoltînd și notînd: $x_1=x$, $x_2=y$ rezultă

$$9y''^2y''' - 45y''y'''y^{IV} + 40y^{V3} = 0 \tag{9}$$

3. Considerațiile precedente se vor aplica ecuației generale a cuadricelor

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 ; \quad (i,j=0,\ 1,\ 2,\ 3.) \tag{10}$$

Ecuația (2) este

$$C_{t+2}^{t} = C_5^2$$

și are soluția $t=3$.

În acest caz ecuația (5), care se scrie

$$\frac{D^3(x_2^2,\ x_2,x_3x_1x_3x_3)}{D(x_1^3,\ x_1^2x_2,\ x^1x_2^2x_2^3} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^3(x_3^2)}{\partial x_1^3} & \frac{\partial^3(x_2x_3)}{\partial x_1^3} & \frac{\partial^3(x_1x_3)}{\partial x_1^3} & \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^3} \\ \frac{\partial^3(x_3^2)}{\partial x_1^2\partial x_2} & \frac{\partial^3(x_2x_3)}{\partial x_1^2\partial x_2} & \frac{\partial^3(x_1x_3)}{\partial x_1^2\partial x_2} & \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^2\partial x_2} \\ \frac{\partial^3(x_3^2)}{\partial x_1\partial x_2^2} & \frac{\partial^3(x_2x_3)}{\partial x_1\partial x_2^2} & \frac{\partial^3(x_1x_3)}{\partial x_1\partial x_2^2} & \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^3(x_3^2)}{\partial x_2^3} & \frac{\partial^3(x_2x_3)}{\partial x_2^3} & \frac{\partial^3(x_1x_3)}{\partial x_2^3} & \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_2^3} \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (11)$$

este identic nulă.
Sistemul (4) va fi :

$$b_{33}\frac{\partial^3(x_3^2)}{\partial x_1^3} + 2b_{23}\frac{\partial^3(x_2x_3)}{\partial x_1^3} + 2b_{13}\frac{\partial^3(x_1x_3)}{\partial x_1^3} + b_{30}\frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^3} = 0$$

$$b_{33}\frac{\partial^3(x_3^2)}{\partial x_1^2\partial x_2} + 2b_{23}\frac{\partial^3(x_2x_3)}{\partial x_1^2\partial x_2} + 2b_{13}\frac{\partial^3(x_1x_3)}{\partial x_1^2\partial x_2} + b_{30}\frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^2\partial x_2} = 0$$

$$b_{33}\frac{\partial^3(x_3^2)}{\partial x_1\partial x_2^2} + 2b_{23}\frac{\partial^3(x_2x_3)}{\partial x_1\partial x_2^2} + 2b_{13}\frac{\partial^3(x_1x_3)}{\partial x_1\partial x_2^2} + b_{30}\frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1\partial x_2^2} = 0$$

$$b_{33}\frac{\partial^3(x_3^2)}{\partial x_2^3} + 2b_{23}\frac{\partial^3(x_2x_3)}{\partial x_2^3} + 2b_{13}\frac{\partial^3(x_1x_3)}{\partial x_2^3} + b_{30}\frac{\partial^3 x_3}{\partial x_2^3} = 0$$

și avînd în vedere că este compatibil (determinantul sistemului este nul) se poate rezolva lăsînd la o parte una din ecuații (de exemplu ultima, determinanții minori de ordinul 3 nefiind identici nuli).

Rezolvînd sistemul se ajunge la următoarele soluții :

$$\frac{b_{33}}{\Delta} = \frac{b_{23}}{-\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\Delta} = \frac{b_{13}}{-\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\Delta} = \frac{b_{30}}{-2\left[x_3 - x_1\frac{\partial x_3}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right]\Delta}$$

unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^3} \\ \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} & 2\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^2\partial x_2} \\ 2\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

Deoarece constantele b_{33}, b_{23}, b_{30}, sînt complet independente, rezultă că trebuie să se considere :

$$\Delta=0$$

Aceasta va reprezenta tocmai ecuația căutată, care luînd : $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, mai poate fi scrisă

$$\begin{vmatrix} 0 & 3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x^3} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \\ 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

4. Cunoscînd ecuația diferențială (5) se pune problema inversă a integrării ei. Evident ecuația (1) trebuie să fie o integrală completă a ecuației (5). Aceeași problemă se pune și în cazul cînd ecuația (5) este identic nulă numai că trebuie folosită ecuația obținută prin anularea determinanților de ordin p.

Pentru exemplificare se va considera ecuația cuadricelor.
Deoarece ecuația (5) este identic verificată, va trebui să se caute integrală completă a ecuației (13).

În primul rînd se face schimbarea $z=f(u)$, unde u este un polinom arbitrar de gradul doi în raport cu variabilele x și y. Funcția f se va determina în așa fel ca toți coeficienții polinomului să rămînă arbitrari. Făcînd apoi înlocuirile se obține ecuația diferențială

$$f'''f' - 3f''^2 = 0 \qquad (14)$$

care admite ca integrală ecuația cuadricelor (10).

5. Considerațiile precedente sînt valabile pentru cazul cînd coeficienții din ecuația (1) sînt complet independenți. Dacă acești coeficienți nu sînt independenți ci între ei există niște relații (omogene în raport cu coeficienții) de formă:

$$f_j(b_{\alpha\beta\ldots\lambda\mu}) = 0 \qquad (j=1, 2\ldots, p) \quad \alpha+\beta+\ldots+\lambda+\mu = m \qquad (15)$$

atunci numărul derivatelor necesare se reduce și anume cel mai mare ordin de derivare t se obține din ecuația

$$C^t_{t+n-1} = C^m_{m+n} - p \qquad (16)$$

Dacă în relațiile (8) figurează numai constantele $b_{\alpha\beta\ldots\lambda\mu}$ pentru care $\mu\geqslant 1$ atunci calculele se simplifică deoarece din sistemul (4) se pot lăsa deoparte derivatele pînă la ordinul m.

6. În felul acesta se poate determina, de exemplu ecuația diferențială a parabolelor din plan.

În ecuația conicelor (7) va trebui ca între coeficienți să existe relația

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \qquad (17)$$

Ecuația (16) în acest caz se scrie

$$C_{t+1}^{t} = C_4^2 - 1$$

și are soluția $t=4$. Din ultimele trei ecuații (4) se obține

$$a_{11}=K(9x_2''^4+3x_2'^2x_2''\,x_2^{IV}-4x_2'^2x_2'''^2-6x_2'x_1''^2x_2''')$$

$$a_{12}=K(4x_2'x_2'''^2+3x_2''^2x_2'''-3x_2'x_2''\,x_2^{IV})$$

$$a_{22}=K(3x_2''\,x_2^{IV}-4x_2'''^2)$$

Dacă aceste valori ale coeficienților se înlocuiesc în relația (24) notînd $x_1=x$, $x_2=y$, rezultă

$$5y'''^2-3y''^2y^{IV}=0$$

care reprezintă în plan ecuația diferențială a parabolelor [1].

BIBLIOGRAFIE

1. Stepanov V. V.: *Curs de ecuații diferențiale*, Ed. Tehnică Buc. 1955, p. 16.
2. Lasleyjr J. W.: On Monge's differential equation, Amer. Math. Monthly 43, 1936, pp. 284—286.
3. Ghircoiașiu N.: Une équation fonctionnelle caractérisant les coniques. Mathematica, vol. XXII, 1946, pp. 66—68.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ И УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(РЕЗЮМЕ)

Предлагается единичный метод определения уравнений с частными производными алгебраических гиперповерхностей, в частности квадрик, путем удаления постоянных из уравнений этих гиперповерхностей (поверхностей).

Результаты действительны и в случае случае алгебраических кривых на плоскости когда этим методом получаются дифференциальные уравнения этих кривых, а следовательно и обратно, общий интеграл.

ÜBER DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER EBENEN ALGEBRAISCHEN KURVEN UND UBER DIE PARTIELIEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER ALGEBRAISCHEN FLÄCHEN

(ZUSAMMENFASSUNG)

Eine einheitliche Methode für Bestimmung der partiellen Differentialgleichungen der algebraischen Hyperflächen, im Sonderfall für Flächen zweiter Ordung, durch Elimination der Konstanten aus den Gleichungen dieser Hyperflächen (Flächen) wird vorgestellt.

Die Ergebnisse sind auch für den Fall ebener algebraischer Kurven gültig, wenn man mit Hilfe dieser Methode die Differentialgleichungen dieser Kurven und folglich umgekehrt das allgemeine Integral bestimmen kann.

APLICAȚIILE MULTIVOCE ȘI SPAȚIILE M-PRODUS

DE

T. BĂNZARU

În semn de prețuire și respect profesorului Vasile Mioc.

În contextul actualei lucrări vom înțelege prin aplicație multivocă acea relație $F \subset X \times Y$ care pentru orice $x \in X$ face să corespundă o submulțime nevidă $F(x)$ a lui Y.

Vom spune că o aplicație multivocă F între spațiile topologice (X,T) și (Y, U) este s.c.s. (semicontinuă superior) pe X, dacă imaginea inversă superioară a oricărei mulțimi deschise a lui Y este o mulțime deschisă în X. Analog, vom spune că F este s.c.i. (semicontinuă inferior) pe X, dacă imaginea inferioară a oricărei mulțimi deschise a lui Y este o mulțime deschisă în X.

Vom nota cele două inverse prin F^{-1} pentru inversa superioară și F_{-1} pentru inversa inferioară.

I. CONSECINȚE DIRECTE ALE SEMICONTINUITĂȚILOR APLICAȚIILOR MULTIVOCE.

Definiția I.1.

Dacă F este o aplicație multivocă a spațiului topologic (X, T) în spațiul topologic (Y, U), vom înțelege prin aplicația $\overline{F}$ acea aplicație care duce pe x în $\overline{F(x)}$, unde $\overline{F(X)}$ înseamnă închiderea mulțimii $F(x)$ în Y.

Teorema I. 1.

Dacă F este o aplicație multivocă s.c.i. a spațiului topologic (X, T) în spațiul topologic (Y, U) atunci aplicația $\overline{F}$ definită mai sus este o aplicație multivocă s.c.i.

Demonstrație

Fie $G \in U$, atunci $\overline{F}_{-1}(G) = \{x : \overline{F(x)} \cap G \neq \Phi\} = \{x : \overline{F(x_0)} \cap G \neq \Phi\}$. Să arătăm că $\overline{F}_{-1}(G) \in T$. Fie pentru acesta $x_0 \in \overline{F}_{-1}(G)$. Aceasta înseamnă că: $\overline{F(x_0)} \cap G \neq \Phi$, adică $\overline{F(x_0)} \cap G \neq \Phi$. Există deci $y \in \overline{F(x_0)} \cap G$. Atunci $y \in \overline{F(x_0)}$ și $y \in G$. Dacă însă $y \in \overline{F(x_0)}$, rezultă că oricare ar fi vecinătatey lui y, $V(y)$, avem: $V(y) \cap F(x_0) \neq \Phi$, deci

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1948 KÖNYVTÁR

și $G \cap F(x_0) \neq \Phi$. adică $x_0 \in F_{-1}(G) \in T$. Mai mult $F_{-1}(G) \subset \overline{F}_{-1}(G)$ și deci $x_0 \in F_{-1}(G) \subset \overline{F}_{-1}(G)$, ceea ce demonstrează că $F_{-1}(G)$ este deschisă în X și deci F este s.c.i.

Teorema I. 2.

Dacă F este o aplicație multivocă s.c.s. a spațiului topologic (X,T) în spațiul regulat și compact (Y, U) atunci aplicația multivocă F este s.c.s. pe X.

Demonstrație

În adevăr, dacă $a \in X$, atunci pentru orice șir generalizat $(x_\alpha : \alpha \in (D, \succ))$ convergent către a avem:

$Ls(F(x_\alpha)) \subseteq \overline{F(a)}$, deoarece (Y, U) este regulat, unde $Ls(F(x_\alpha))$ este limita topologică superioară a șirului generalizat de mulțimi $F(x_\alpha)$.

Cum însă:

$Ls(F(x_\alpha)) = Ls(\overline{F(x_\alpha)}) \subseteq \overline{F(a)}$ și spațiul (Y, U) este biocompact rezultă că aplicația multivocă $\overline{F}$ este s.c.s. în punctul a, care fiind arbitrar atrage că $\overline{F}$ este s.c.s. pe X.

Definiția I. 2.

Vom spune că aplicația multivocă $F: (X, T) \to (Y, U)$ este Y-compactă, dacă $F(x)$ este mulțime compactă în (Y, U) pentru orice $x \in X$.

Definiția I. 3.

Aplicația multivocă $F: (X, U) \to (Y, U)$ se numește deschisă dacă pentru orice mulțime deschisă $G \in T$ avem $F(G) \in U$.

Teorema I. 3.

Dacă $F: (X, T) \to \succ (Y, U)$ este o aplicație multivocă s.c.s. Y-compactă și deschisă, iar (X, T) este un spațiu local compact, atunci și (Y, U) este local compact.

Demonstrație

Fie $y \in Y$ arbitrar. Atunci deoarece F este o aplicație 2 „pe" $(\to\succ)$ există $x \in X$ astfel ca $y \in F(x)$. Deoarece X este local compact există o vecinătate $V(x)$ a lui x, compactă, Atunci, întrucît F este deschisă, $F(V) = W$ este o vecinătate a lui y care va fi compactă întrucît se știe că o aplicație s.c.s. și Y-compactă conservă compactitatea.

Teorema I. 4.

Dacă A și B sînt submulțimi ale unui spațiu topologic (X, T) astfel încît $X = A \cup B$ iar $A - B$ și $B - A$ sînt separate, atunci dacă F este o aplicație multivocă definită pe X cu valori în spațiul topologic (Y, U) și F este s.c.s. (s.c.i.) pe A, și pe B ,atunci F este s.c.s. (s.c.i.) pe (X, T).

Demonstrație

Fie $G \in U$. Deoarece F este s.c.s. pe A și pe B înseamnă că $F^{-1}(G) \cap A$ este deschisă în (A, T_A) iar $F^{-1}(G) \cap B$ este deschisă în (B, T_B). Dar $A - B$ și $B - A$ fiind separate atunci conform teoremei 19. cap. I. [2], avem că $F^{-1}(G)$ este deschisă în (X, T) și deci $F^{-1}(G) \in T$.

În același mod se demonstrează și pentru s.c.i.

II. M-PRODUS DE SPAȚII TOPOLOGICE

Definiția II. 1.

Fie $\{X_i : i \in I\}$ o familie de mulțimi. Vom defini M-produsul acestei familii ca mulțimea tuturor aplicațiilor multivoce $F: I \to \bigcup_{i \in I} X_i$, care se bucură de proprietatea că $F(i) \subset X_i$.

Vom nota acest produs prin $M\underset{i \in I}{X_i}$.

Definiția II. 2.

Fie $B_j \subset X_j$. Atunci vom defini mulțimile B_j^{M+} și B_j^{M-} ca submulțimi ale mulțimii $M\underset{i \in I}{X_i}$ astfel:

$$B_j^{M+} = \{F : F(j) \subset B_j,\ F \in M\underset{i \in I}{X_i}\}$$

$$B_j^{M-} = \{F : F(j) \cap B_j \neq \Phi,\ F \in M\underset{i \in I}{X_i}\}.$$

Definiția II. 3.

Dacă (X_i, T_i), $i \in I$ este o familie de spații topologice atunci topologiile pe $M\underset{i \in I}{X_i}$ pentru care familiile $\{G_i^{M+} : G_i \in T_i, i \in I\}$, $\{G_i^{M-} : G_i \in T_i,\ i \in I\}$ sînt subbaze le vom numi topologia M-produs superioară respectiv topologia M-produs inferioară, notîndu-le cu $M^+\underset{i \in I}{T_i}$ și $M^-\underset{i \in I}{T_i}$.

Topologia pe $M\underset{i \in I}{X_i}$ care areca subbază cele două familii de mai sus se va numi topologia M-produs notată în cele ce urmează prin $M\underset{i \in I}{T_i}$.

Definiția II. 4.

Aplicația multivocă $P_j: M\underset{i \in I}{X_i} \to\!\!\to X_j$, definită prin $P_j(F) = F(j)$ se numește proiecția M-produsului pe X_j.

Teorema II. 1.

Dacă (X_i, T_i), $i \in I$ este o familie de spații topologice atunci aplicația proiecție:

$$P_j : (M\underset{i \in I}{X_i},\ M\underset{i \in I}{T_i}) \to\!\!\to (X_j,\ T_j)$$

este o aplicație multivocă continuă.

Demonstrație

Fie $G_j \in T_j$. Atunci $P_j^{-1}(G_j) = \{F \in M\underset{i \in I}{X_i} : P_j(F) \subset G_j\} = \{F : F(j) \subset G_j\} = G_j^{M+} \in M\underset{i \in I}{T_i}$ și deci P_j este s.c.s.

Avem deasemenea:

$(P_j)_{-1}(G_j) = \{F \in M\underset{i \in I}{X_i} : P_j(F) \cap G_j \neq \Phi\} = \{F : F(j) \cap G_j \neq \Phi\} = G_j^{M-} \in M\underset{i \in I}{T_i}$, și deci P_j este s.c.i. Rezultă în concluzie că P_j este aplicație multivocă continuă.

Teorema II. 2.

Orice proiecție $P_j : (MX_i, MT_i) \to (X_j, T_j)$ este o aplicație multivocă deschisă.

Demonstrație

Fie $U \in MT_i$ și $x_j \in P_j(U)$. Atunci există $F \in U$ astfel ca $x_j \in F(j)$. Deoarece U este deschisă aceasta conține o mulțime :

$$A_F = \bigcap_{k=1}^{n} \bigcap_{s=1}^{p} \left[G_{i_k}^{M+} \cap G_{r_s}^{M-} \right] : i_k, r_s \in I.$$

unde $F \in A_F$.

Este suficient acuma pentru a demonstra teorema să arătăm că $P_j(A_F)$ este deschisă în X_j.

Cazul 1

Dacă $j \neq i_k$, $k=1,2,\ldots,n$ și există s astfel ca $j=r_s$ atunci $P_j(A_F)=X_j$, deoarece $X_j \cap G_{r_s} \neq \Phi$.

Cazul 2

Dacă $j \neq i_K$ și $j \neq r_S$ pentru $k=1,2,\ldots,n$ și $s=1,2,\ldots,p$. Atunci fie funcția $f : X_j \to MX_i$ definită astfel ca pentru $z \in X_j$, $P_j(f(z))=z$ și $P_i(f(z))=F(i)$ pentru $i \neq j$.

Atunci $f(X_j) \subset A_F$ deoarece :

$$P_{i_k}(f(X_j))=F(i_k) \subset G_{i_k} \text{ și } P_{r_s}(f(X_j))=F(r_s)$$

unde $F(r_s) \cap G_{r_s} \neq \Phi$.

Prin urmare avînd $f(X_j) \subset A_F$ rezultă $P_j(f(X_j))=X_j \subset P_j(A_F)$ și deci $P_j(A_F)= =X_j \in T_j$.

Dacă există k astfel ca $j=i_k$ și $j \neq r_s$, $s=1,2,\ldots,p$, atunci $f(z) \in A_F$ dacă și numai dacă $z \in G_j$.

În adevăr, dacă $f(z) \in A_F$ rezultă $P_j(f(z))=\{z\} \subset G_j$ și deci $z \in G_j$.

Cazul 3

Dacă $z \in G_j$ atunci $\{z\} \subset G_j$ prin urmare $P_j(f(z)) \subset G_j$ iar $P_{i_k}(f(z))=F(i_k) \subset G_{i_k}$ iar $P_{r_s}(f(z))=F(r_s)$ și $F(r_s) \cap G_{r_s} \neq \Phi$ și deci $f(z) \in A_F$. Prin urmare $P_j(A_F)= =G_j \in T_j$.

Cazul 4.

Dacă există k și s astfel ca $j=i_k=r_s$, atunci deoarece $G_{i_k}^{M+} \subset G_{i_k}^{M-}$ avem aceeași situație ca și pentru cazul 3.

Teorema II. 3.

M-produsul $F=\underset{i=1}{\overset{n}{M}} F_i$ a unei familii finite de aplicații F_i, Y_i-compacte și s.c.s. ale spațiului topologic (X,T) în (Y_i, U_i) este o aplicație multivocă s.c.s. și Y-compactă a lui (X, T) în $\left(\underset{i=1}{\overset{n}{M}} Y_i, \underset{i=1}{\overset{n+}{M}} U_i\right)$.

Demonstrație

Aplicația $F : (X, T) \to \left(\underset{i=1}{\overset{n}{M}} Y_i, \underset{i=1}{\overset{n+}{M}} T_i\right)$ este definită de $F(x) = \underset{i=1}{\overset{n}{M}} F_i(x)$, $\forall x \in X$.

Aplicațiile F_i fiind Y_i-compacte, rezultă după [9] că $F(x)$ este compactă în spațiul $\left(\underset{i=1}{\overset{n}{M}} Y_i, \underset{i=1}{\overset{n}{M}} T_i\right)$. Cum $\underset{i=1}{\overset{n}{M}}{}^{+} U_i \subset \underset{i=1}{\overset{n}{M}} U_i$ rezultă că $F(x)$ este compactă și în $M^{+}T_i$ ceea ce demonstrează că F este Y-compactă.

Fie acum $G \in \underset{i=1}{\overset{n}{M}}{}^{+} U_i$ și fie $a \in F^{-1}(G)$. Mulțimea $F(a)$ fiind compactă și conținută în G, deoarece $F(F^{-1}(G)) \subset G$, se poate acoperi cu un număr finit de mulțimi de forma $E_j = \underset{i=1}{\overset{n}{M}} G_i^j$, $G_i^j \in U_i$, $j = 1,2, \ldots, m$, unde E_j este o bază pentru $M^{+}U_i$.

Dacă $S_i \subset F_i(a)$, $i = 1,2, \ldots, n$ atunci însemnăm prin $E(S_1)$ reuniunea mulțimilor E_j care intersectează mulțimea $S_1 M \left(\underset{i=1}{\overset{n}{M}} F_i(a)\right)$ și în general prin $E(S_k)$ reuniunea mulțimilor $\underset{i=1}{\overset{n}{M}} R_i$, $R_i = F_i(a) i \neq k$ și $R_k = S_k$. Mulțimile $P_l E(S_k)$ pentru $1 \neq k$ sînt deschise deoarece aplicația proiecție este deschisă. Cînd S parcurge toate părțile lui $F_k(a)$, atunci mulțimea $\{P_l E(S_k) : S_k \subset F_k(a), k \neq 1\}$ este finită și notînd $D_l = \bigcap_{S_k \subset F_k(a)} P_l(E(S_k))$, acestea sînt deschise în Y_l și prin urmare $D = \underset{l=1}{\overset{n}{M}} D_l$ este un element al bazei topologiei lui Y și avem :

$$F^{-1}D = \{x : \underset{l=1}{\overset{n}{M}} F_l(x) \subset \underset{l=1}{\overset{n}{M}} D_l\} = \bigcap_{l=1}^{n} F^{-1}D_l .$$

Rezultă deci că $F^{-1}D$ este o mulțime deschisă a spațiului (X, T). Cum însă $F(a) \subset D \subset G$, avem că $a \in F^{-1}D \subset F^{-1}G$, adică $F_l^{-1}G$ este o vecinătate a fiecărui punct al său și prin urmare este deschisă.

Aceasta demonstrează că F este s.c.s.

Teorema II. 4.

Dacă (X_i, T_i) ; $i \in I$, este o familie de spații topologice conexe, atunci M-produsul topologic $(\underset{i \in I}{M} X_i, \underset{i \in I}{M} T_i)$ este un spațiu topologic conex.

Demonstrație

Presupunem că deși spațiile (X_i, T_i) ; $i \in I$ sînt conexe totuși spațiul $(\underset{i \in I}{M} X_i, \underset{i \in I}{M} T_i)$ nu este conex. Atunci $\underset{i \in I}{M} X_i = A \cup B$, $A \neq \Phi$, $B \neq \Phi$, $A \cap B = \Phi$, și $A, B \in \underset{i \in I}{M} T_i$.

Fie produsul cartezian πX_i, care evident este o submulțime a M-produsului $i\in I$ și să considerăm restricția topologiei $M\ T_i$ la acest produs cartezian. Această $i\in I$ restricție ne dă evident topologia produs obișnuită.

Deoarece A, $B\in M T_i$ avem $A\cap\pi X_i$ și $B\cap\pi X_i\in\pi T_i$. $A\cap\pi X_i\neq\Phi$, deoa- $i\in I$ $i\in I$ $i\in I$ $i\in I$ $i\in I$

rece A fiind deschisă în $M X_i$ există $G=\left(\bigcap_{k=1}^{n} G_{i_k}^{M+}\right)\cap\left(\bigcap_{s=1}^{p} G_{j_s}^{M-}\right)\neq\Phi$ și $G\subset A$. $i\in I$

Dar $G=\{F\in M X_i;\ F(i_k)\subset G_{i_k},\ F(j_s)\cap G_{j_s}\neq\Phi,\ k=1,2,\ldots,n;\ s=1,2,\ldots,p\}\supset$ $i\in I$

$\supset\{f\in\pi X_i:\ f(i_k)\in G_{i_k},\ f(j_s)\in G_{j_s};\ k=1,2,\ldots,n;\ s=1,2,\ldots,p\}\neq\Phi$. $i\in I$

Avem de asemenea:

$$(A\cap\pi X_i)\cap(B\cap\pi X_i)=(A\cap B)\cap\pi X_i=\Phi\cap\pi X_i=\Phi.$$ iar $(A\cap\pi X_i)\cup(B\cap$

$\cap\pi X_i)=[(A\cap\pi X_i)\cup B]\cap[(A\cap\pi X_i)\cup\pi X_i]=[(A\cup B)\cap(\pi X_i\cup B)]\cap[(A\cup\pi X_i)\cap$

$\cap\pi X_i]=[\pi X_i\cup B]\cap\pi X_i=(\pi X_i\cap\pi X_i)\cup(\pi X_i\cap B)=\pi X_i\cup(\pi X_i\cap B)=\pi X_i.$,

ceea ce înseamnă că spațiul produs cartezian: $(\pi X_i,\ \pi T_i)$ este un spațiu neconex, $i\in I$ $i\in I$

deși spațiile (X_i, T_i) sînt conexe. Acest lucru este absurd și prin urmare spațiul M-produs este un spațiu topologic conex.

BIBLIOGRAFIE

[1]. Berge C.: *Espaces topologiques. Fonctions multivoques.* Dunod. Paris 1959.
[2]. Kelley J. L.: *General Topology.* New York, Van Nostrand, 1955.
[3]. Thron W. J.: *Topological structures.* Boulder, Colorado 1966.
[4]. Kuratowski K.: *Introducere în teoria mulțimilor și în topologie.* Trad. din limba polo neză. Ed. the. Buc. 1969.
[5]. Mrowka S.: On the convergence of nest of sets. Fund. Math. 45 (1958) 237—246.
[6]. Carlos J. R. Borges: A study of multivalued functions. Pacific Journal of Math. Vol. 23 No. 3 1967.
[7]. Fuller R. V.: *Relations among continuous and various noncontinuous functions.* Pacific J. Math. 25 (1968)
[8]. Hrycay R.: *Noncontinuous multifunctions.* Pacific J. Math. vol. 5 35 No. 1, 1970.
[9]. Lin Y-F.: Tychonoff's theorem for the space of multifucntions. Amer. Math. Monthly. 74 (1967).
[10]. Lin Y-F. and David A. Rose: Ascoli's theorem for spaces of multifunctions. Pacific Journal of Math. vol. 34 No. 3, 1970.

MEHRDEUTIGE ABBILDUNGEN UND M-PRODUKTRÄUME.

(ZUSAMMENFASSUNG)

Im ersten Teil der Arbeit sind einige Lehrsätze angegeben, über die Halbstetigkeiten der mehrdeutigen Abbildung $\overline{F}$ die aus F mit Hilfe der abgeschlossenen Menge $F(x)$, die Werte von F in x ist, erhalten wird. Gleichfalls

werden einige Lehrsätze über die lokal Kompaktheit und über die Stetigkeit einer mehrdeutigen stetigen Abbildung, die auf separierte Untermengen eines Raumes definiert sind.

Im zweiten Teil der Arbeit ist das untere und obere mehrfache Produkt von topologischen Räumen definiert. Weiter werden einige Lehrsätze über die Projektion einer mehrdeutigen Abbildung angeführt. Als Abschluss wird noch ein Lehrsatz über den Zusammenhang eines topologisch mehrfach-Produktraumes bewiesen, falls die Komponentenräume zusammenhängend sind.

МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЕ И М-ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА

(РЕЗЮМЕ)

В первой части работы докладываются теоремы полунепрерывностей многозначный отображений $\overline{F}$, получивший от F с закр'тием множеством F(x). Также докладываются теоремы о локальном компактности и непрерывном, непрерывностях многозначных отображений на отдельн'е подмноженств пространства определений.

В торой части работы определить высший и низкий много-произведение топологических пространств и доказываются теоремы о многозначный отображений проэкций.

В Заключение, доказываються теорема о связи много-произведение топологического пространства когда компонент'е пространства-связное.

RELAȚII METRICE PE HIPERSFERE PSEUDOEUCLIDIENE

DE

N. BOJA

Omagiu profesorului V. Mioc.

I. Într-o notă anterioară, [1], am caracterizat, prin utilizarea unei metode analitice, un sistem de funcții trigonometrice care generalizează funcțiile trigonometrice obișnuite (circulare), precum și pe cele hiperbolice. Aceste funcții au fost interpretate ca soluții continue și măsurabile ale sistemului de ecuații funcționale

$$C^2(x)-uS^2(x)=1$$

$$C(x-y)=C(x)C(y)-u\,S(x)S(y)$$

cu $u \in R$, arbitrar fixat; și, stabilind mai întîi principalele lor proprietăți, analoage celor referitoare la funcțiile trigonometrice uzuale, s-a precizat forma acestora prin următoarele expresii:

$$C_H(x)=\frac{e^{ux}+e^{-ux}}{2},\quad S_H(x)=\frac{1}{\sqrt{u}}\,\frac{e^{ux}-e^{-ux}}{2};(u>0)$$

numite *funcții hiperbolice*,

$$C_P(x)=1,\qquad S_P(x)=x;\qquad (u=0)$$

numite *funcții parabolice* și

$$C_E(x)=\cos ux,\quad S_E(x)=\frac{1}{i\sqrt{u}}\sin ux;\quad (u<0)$$

numite *funcții eliptice*. Primele conțin, pentru $u=+1$, pe $ch\,x$ și $sh\,x$, iar ultimele, pentru $u=-1$, pe $\cos x$ și $\sin x$.

Folosirea notațiilor $C(x)$, $S(x)$ și $T(x)=S(x)/C(x)$ pentru funcțiile trigonometrice generalizate corespunzătoare unui u arbitrar face posibilă scrierea unitară a relațiilor și a operațiilor din algebra numerelor complexe, din calculul vectorial, din trigonometria însăși, din geometria spațiilor pseudoeuclidiene, etc.

În prezentul articol ne vom referi la acest ultim domeniu, limitîndu-ne doar la cîteva relații dintre elementele figurilor geometrice aparținînd hipersferelor spațiilor respective.

Pentru aceasta vom prezenta mai întîi definiția unui spațiu pseudoeuclidian (după B.A. Rozenfeld, [2]).

Un spațiu pseudoeuclidian n-dimensional de indice l este o mulțime de elemente (puncte și vectori) care constituie un spațiu afin și pentru care:

1°. Putem atașa oricărei perechi de vectori x,y un număr real k notat

$$k=x \triangleleft y$$

și numit *produsul scalar* al vectorilor.

2°. $x \triangledown y = y \triangledown x$

3°. $x \triangledown (y+z) = x \triangledown y + x \triangledown z$

4°. $(kx) \triangledown y = k(x \triangledown y)$

5°. Există n vectori x_i, ca

$$x_\alpha \triangledown x_\alpha > 0 \quad (\alpha \leqslant l)$$

$$x_\beta \triangledown x_\beta < 0 \quad (\beta > l)$$

$$x_j \triangledown x_i = 0 \quad (i \neq j)$$

Spațiile euclidiene se deosebesc de cele definite anterior prin aceea că produsul scalar, notat $k=x \cdot y$, nu satisface condiției 5°, ci condiției

5′. Există n vectori x_i, ca

$$x_i \cdot x_i > 0$$

$$x_i \cdot x_j = 0 \qquad (i \neq j)$$

II. Să considerăm acum un spațiu vectorial bilateral V peste un corp K (comutativ). Presupunînd că $\dim V=n$, fie $\{e_i\}_{i \in I}$ o bază a spațiului; atunci, pentru vectorii

$$x=x^i e_i, \qquad y=y^i e_i, \qquad i \in I \tag{1}$$

definim produsul scalar în modul următor

$$< x, y > = \varphi_x \varphi_y \tag{2}$$

unde

$$\varphi_x = x^i(\lambda_i^j e_j), \quad \varphi_y = y^i(\lambda_i^j e_j)$$

cu (λ_i^j) o matrice diagonală de elemente

$$\lambda_i^j = \delta_i^j (i,j \neq n), \ \lambda_n^n = \nu, \text{ cu } \nu^2 = -u.$$

Baza lui V o presupunem ortonormată, astfel încît (2) se va scrie

$$\varphi_x \varphi_y = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \ldots + x^{n-1} y^{n-1} - u x^n y^n \tag{3}$$

Dacă interpretăm pe x, y ca vectori de poziție ai unor puncte dintr-un spațiu geometric punctual, atunci forma biliniară (3) va defini structura metrică a acestui spațiu, pe care-l vom nota fie $R_l^n(u)$ — reprezentînd un spațiu pseudo-euclidian de indice l, unde $l=n$ sau $l=n-1$ după cum $u<0$ sau $u>0$, fie ${}^{(d)}R_l^n(u)$ — reprezentînd un spațiu pseudoeuclidian de indice $1=n-1$ și defect $d=1$ dacă $u=0$. În particular, pentru $u=-1$, avem $e=n$, $d=0$, adică un spațiu euclidian.

Această definiție este în conformitate cu condițiile 1°—5°.

Distanța dintre două puncte $X_1(x_1)$ și $X_2(x_2)$ ale acestui spațiu

$$d(X_1,X_2)=\sqrt{\varphi_{x_1-x_2}\varphi_{x_1-x_2}}=||x_1-x_2|| \tag{4}$$

poate fi reală pozitivă, imaginară sau nulă; inegalitatea triunghiului din axiomele spațiului metric precum și inegalitatea lui Cauchy în aceste cazuri, nu sînt întotdeauna îndeplinite, deoarece forma pătratică $<x, x>$ nu este pozitiv definită.

Unghiul θ a doi vectori este definit de

$$C(\theta)=\frac{\varphi_x\varphi_y}{||x||\ ||y||} \tag{5}$$

unde $C(\theta)$ este una din funcțiile considerate în I și anume:

1) $C_R(\theta)$ — dacă $z\in L(x,y)$, unde

$$L(x,y)=\{z\mid z=\alpha x+\beta y,\ \alpha\beta\in K,\ x,y\in V\}$$

avem $||z||\in\mathfrak{R}$, deoarece în acest caz planul suport al varietății liniare $L(x,y)$ este un plan euclidian $R_2^2(-1)$ în care inegalitatea lui Cauchy are loc. Aceeași funcție se folosește dacă $||z||\in\mathfrak{C}$ pentru $\forall z\in L(x,y)$, al cărei suport este un plan pseudoeuclidian R_0^2 în care, de asemenea, este verificată inegalitatea specificată.

2) $C_H(\theta)$ — dacă $\exists z_1, z_2\in L(x,y)$ așa ca cei doi vectori să fie ortogonali și $||z_1||\in R$, iar $||z_2||\in C$, cînd suportul varietății este un plan pseudoeuclidian R_1^2 în care inegalitatea lui Cauchy nu are loc.

III. Hipersferele (sau (n_{-1})— sferele) unui spațiu ${}^{(d)}R_1^n(u)$, ca mulțimi de puncte situate la „distanță" constantă față de un punct fixat $0(0)\in{}^{(d)}R_1^n$, potrivit lui (4), sînt

$$H_H=\{X(x)\mid\varphi_x\varphi_x=\rho^2,\ u>0\} \tag{6}$$

$$H_P=\{X(x)\mid\varphi_x\varphi_v=\rho^2,\ u=0\} \tag{7}$$

$$H_E=\{X(x)\mid\varphi_x\varphi_x=\rho^2,\ u<0\} \tag{8}$$

și pot fi de rază reală, $\rho=r$, imaginară, $\rho=iq$ sau nulă, $\rho=0$. Potrivit cu notațiile folosite, vom spune că hipersferele spațiilor pseudoeuclidiene ${}^{(0)}R_{n-1}^n(u)$, ${}^{(1)}R_{n-1}^n(o)$, ${}^{(0)}R_n^n(u)$ sînt respectiv *hipersfere hiperbolice, hipersfere parabolice sau hipersfere eliptice.*

Modelele geometrice ale acestor tipuri de hipersfere într-un spațiu afin E^n sînt cuadrice (riglate sau ovale) sau cuadrice degenerate. Astfel, H_H este reprezentată prin hiperboloizi cu una sau cu două pînze, sau prin conuri, după cum ρ este un număr real ($\neq 0$), imaginar sau nul; H_P este reprezentată printr-un cilindru avînd generatoarele paralele cu axa Ox^n dacă $\rho \neq 0$ (real sau imaginar), sau de o pereche de hiperplane imaginare, dacă $\rho = 0$; la fel, pentru H_E avem ca imagini în modelul considerat elipsoizi reali sau imaginari după cum ρ are una sau alta din aceste proprietăți, sau conuri imaginare cu vîrful în O, dacă $\rho = 0$.

În toate considerațiile, u poate lua orice valoare din domeniile stabilite prin relațiile (6)—(8).

În particular, pentru $u = -1$ am văzut că sîntem situați într-un spațiu euclidian ${}^{(0)}R_n^n(-1) = R^n$ în care H_E sînt $(n-1)$ — sferele obișnuite, iar ca funcții trigonometrice vor fi folosite $\cos x$ și $\sin x$. Un alt caz particular important, obținut pentru $u = +1$ și luînd $n = 4$ este spațiul Minkovski ${}^{(0)}R_3^4(+1)$, ale cărui „hipersfere" sînt hiperboloizi de rotație în jurul axei Ot cu una sau cu două pînze sau conul izotrop avînd aceeași axă de rotație și vîrful în origine; în acest caz, se folosesc funcțiile $ch\, x$ și $sh\, x$ sau $\cos x$ și $\sin x$ potrivit situațiilor 2) sau 1) din II.

Fie acum trei hiperplane trecînd prin origine; acestea se intersectează cu o hipersferă H, avînd una din ecuațiile (6)—(8), după trei „cercuri mari" ale acesteia, care determină un triunghi sferic de vîrfuri $X_i(x_i)$ $(i = 1,2,3)$. Notăm prin l_i lungimile laturilor opuse acestora și prin θ_i unghiurile triunghiului. Dacă ρ este raza lui H, avem între elementele menționate relațiile

$$C\left(\frac{l_i}{\rho}\right) = \frac{\varphi_{xj}\varphi_{xk}}{\rho^2} \quad (i,j,k = 1,2,3\,;\ i \neq j \neq k) \tag{9}$$

Această formulă se adaptează potrivit cu tipul de spațiu pseudoeuclidian și cu natura razei hipersferei acestnia.

Astfel, pentru hipersferele de rază $\rho = r$ ale spațiului ${}^{(0)}R_n^n(u)$, pentru care $u < 0$, (9) devine

$$C_E\left(\frac{l_i}{r}\right) = \frac{\varphi_{xj}\varphi_{xk}}{r^2}, \tag{9}$$

iar pentru o hipersferă hiperbolică $(u' > 0)$ de rază imaginară $\rho = iq$ avem

$$C_H\left(\frac{l_i}{q}\right) = -\frac{\varphi_{xj}\varphi_{xk}}{q^2} \tag{9''}$$

deoarece

$$C_E\left(\frac{l_i}{iq}\right) = \cos\left(-iu\frac{l_i}{q}\right) = \cos\left(u' i\,\frac{l_i}{q}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-u'\frac{li}{q}} + e^{\frac{u'li}{q}}\right) = C_H\left(\frac{l_i}{q}\right)$$

unde $u' = -u > 0$. În fine, pentru o hipersferă H_H de rază reală $\rho = r$,

$$C_E\left(\frac{li}{r}\right) = \frac{\varphi_{xj}\varphi_{xk}}{r^2} \tag{9'''}$$

Dacă latura X_jX_k a triunghiului este conținută într-un plan ${}^{(0)}R_1^2(u)$ trecînd prin axa Ox^n, atunci vectorii de poziție ai vîrfurilo X_j, X_k pot fi luați în

acest plan (considerat ca un spațiu pseudoeuclidian bidimensional) respectiv $x_j=\{rC_H(\psi),\ rS_H(\psi)\}, x_k=\{r,o\}$, căci punctele considerate aparțin „cercului" său

$$(x^1)^2-u(x^2)^2=r^2$$

de secțiune cu hipersfera H_H. Astfel, observăm că în (9''') putem folosi și funcții hiperbolice

$$C_E\left(\frac{l_i}{r}\right)=\frac{r^2C_H(\psi)-u\cdot 0}{r\sqrt{C_H^2(\psi)-uS_H^2(\psi)\cdot r}}=C_H(\psi)$$

unde s-a ținut cont de (3), (5) și de prima ecuație funcțională din I ; și, în acest caz rezultă că unghiul φ al vectorilor de poziție este imaginar, $\psi=i\varphi$.

În exemplele menționate ne-am oprit numai la cazurile hipersferelor a căror imagine în spațiul E^n este o cuadrică reală nedegenerată.

Măsurînd unghiul θ_i al triunghiului sferic, obișnuit, prin unghiul tangentelor în vîrful $X_i(x_i)$ la laturile (arcee de cerc mare) ce pornesc din el, alegem pe aceste tangente punctele $Y_j(y_j)$, $Y_k(y_k)$ așa ca vectorii y_j, y_k să aparțină varietăților liniare $L(x_j)$, $L(x_k)$ generate de x_j, x_k. Dacă $\alpha_j\alpha_k$ sînt scalarii corespunzători alegerii făcute, avem

$$\varphi_{x_i}\varphi_{x_i}-\alpha_j x_j=0,\quad \varphi_{x_c}\varphi_{x_i}-\alpha_k x_k=0$$

și, de aici, cu (9)

$$\alpha_j=\frac{\rho^2}{\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}}=1/C\left(\frac{l_k}{\rho}\right),\ \alpha_k=\frac{\rho^2}{\varphi_{x_i}\varphi_{x_k}}=1/C\left(\frac{l_j}{\rho}\right) \tag{10}$$

Calculăm, ținînd cont de (10), ca în [3], expresiile

$$\|x_i-\alpha_j x_j\|^2=\varphi_{x_i}\varphi_{x_i}-2\alpha_j\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}+\alpha_j^2\varphi_x\varphi_{x_j}$$

$$\|x_i-\alpha_j x_j\|^2=(\alpha_j^2-1)\rho^2=-uT^2\left(\frac{l_j}{\rho}\right)\rho^2 \tag{11}$$

și

$$\|x_i-\alpha_k x_k\|^2=-uT^2\left(\frac{l_k}{\rho}\right)\rho^2.$$

Analog, găsim

$$\varphi_{x_i}-\alpha_j x_j\varphi_{x_i}-\alpha_k x_k=\left(\frac{C\left(\frac{l_i}{\rho}\right)}{C\left(\frac{l_j}{\rho}\right)C\left(\frac{l_k}{\rho}\right)}-1\right)\rho^2 \tag{12}$$

În definitiv, în baza lui (5), (11) și (12)

$$C(\theta_i)=\frac{\varphi_{x_c}-\alpha_j x_j\varphi_{x_i}-\alpha_k x_k}{\|x_i-\alpha_j x_j\|\,\|x_i-\alpha_k x_k\|}=\frac{\rho^2\left(C\left(\frac{l_i}{\rho}\right)-C\left(\frac{l_j}{\rho}\right)C\left(\frac{l_k}{\rho}\right)\right)}{\rho\sqrt{-u}S\left(\frac{l_j}{\rho}\right)\cdot\rho\sqrt{-u}S\left(\frac{l_k}{\rho}\right)}$$

sau

$$C(\theta_i) = \frac{C\left(\frac{l_i}{\rho}\right) - C\left(\frac{l_j}{\rho}\right) C\left(\frac{l_k}{\rho}\right)}{-uS\left(\frac{l_j}{\rho}\right) S\left(\frac{l_k}{\rho}\right)}$$

sau, încă

$$C\left(\frac{l_i}{\rho}\right) = C\left(\frac{l_j}{\rho}\right) C\left(\frac{l_k}{\rho}\right) - uS\left(\frac{l_j}{\rho}\right) S\left(\frac{l_k}{\rho}\right) C(\theta_i). \tag{13}$$

Formula găsită reprezintă teorema sferică a cosinusurilor.

Pentru cazurile particulare uzuale, luînd $u=-1$, obținem, de aici, teorema referitoare la sferele obișnuite ale spațiului euclidian

$$\cos\left(\frac{l_i}{r}\right) = \cos\left(\frac{l_j}{r}\right) \cos\left(\frac{l_k}{r}\right) + \sin\left(\frac{l_j}{r}\right) \sin\left(\frac{l_k}{r}\right) \cos(\theta_i) \tag{13'}$$

iar pentru $u=+1$, referitor la hipersferele de rază imaginară $\rho=iq$ avem

$$ch\left(\frac{l_i}{q}\right) = ch\left(\frac{l_j}{q}\right) ch\left(\frac{l_k}{q}\right) - sh\left(\frac{l_i}{q}\right) sh\left(\frac{l_k}{q}\right) \cos(\theta_i) \tag{13''}$$

Pentru $u=0$,(13) este verificată identic.

În cazul formulei (13'') se păstrează cos θ_i deoarece planul tangent la această hipersferă determinat de punctul X_i și de varietatea $L(x_i - \alpha_j x_j,\ x_i - \alpha_k x_k)$ este un plan euclidian $R_2^2(-1)$.

Pentru hipersfera H_H cu $\rho=r$ are loc o formulă (13'), deoarece în acest caz vectorii x_i au lungimea reală.

Dacă unghiul θ_i este un „unghi drept", adică este de forma [1]

$$\theta_i = \frac{\pi}{2u}\ {}_i(u>0) \text{ sau } \theta_i = \frac{\pi}{2u}\ (u<0)$$

atunci (13) devine 0 „teoremă a lui Pitagora"

$$C\left(\frac{l_i}{\rho}\right) = C\left(\frac{l_j}{\rho}\right) C\left(\frac{l_k}{\rho}\right) \tag{14}$$

pentru triunghiul considerat.

În fine, pornind de la

$$S^2(\theta_i) = \frac{1}{u}\left(C^2(\theta_i) - 1\right) = \frac{1}{u} \cdot \frac{\left(C\left(\frac{l_i}{\rho}\right) - C\left(\frac{l_j}{\rho}\right) C\left(\frac{l_k}{\rho}\right)\right)^2 - u^2 S^2\left(\frac{l_j}{\rho}\right) S^2\left(\frac{l_k}{\rho}\right)}{u^2 S^2\left(\frac{l_j}{\rho}\right) S^2\left(\frac{l_k}{\rho}\right)}$$

în baza identității $-uS^2(x) = 1 - C^2(x)$, obținem expresia

$$\frac{S^2(\theta_i)}{S^2\left(\frac{l_i}{\rho}\right)} = \frac{1}{u^3} \cdot \frac{C^2\left(\frac{l_i}{\rho}\right) + C^2\left(\frac{l_j}{\rho}\right) + C^2\left(\frac{l_k}{\rho}\right) - 2C\left(\frac{l_i}{\rho}\right) C\left(\frac{l_j}{\rho}\right) C\left(\frac{l_k}{\rho}\right) - 1}{S^2\left(\frac{l_i}{\rho}\right) S^2\left(\frac{l_z}{\rho}\right) S^2\left(\frac{l_k}{\rho}\right)}$$

avînd membrul drept simetric în indicii i, j, k, deci invariant la orice permutare a lor.

Astfel, rezultă egalitățile

$$\frac{S(\theta_i)}{S\left(\frac{l_i}{\rho}\right)} = \frac{S(\theta_j)}{S\left(\frac{l_j}{\rho}\right)} = \frac{S(\theta_k)}{S\left(\frac{l_k}{\rho}\right)} \quad . \tag{15}$$

care reprezintă teorema sferică a sinusurilor.

BIBLIOGRAFIE

[1]. B o j a N. — Asupra unei extinderi a noțiunii de funcție trigonometrică, Gaz. Mat., seria A, vol. LXXV, nr. 5, 1969.
[2]. R o z e n f e l d B. A. — *Mnogomerniie prostranstva*, Moskva, 1966.
[3]. R o z e n f e l d B. A. — *Neevklidovi geometrii*, Moskva, 1955.

МЕТРИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ НА ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ ГИПЕРСФЕРАХ

(РЕЗЮМЕ)

В статье выводятся два важных метрических соотношения относящиеся к сферическим треугольникам в случае обычных сфер эвклидового пространства или для сфер с радиусом iq.

Обобщение было возможно используя решения системы функциональных уравнений представленных в первом разделе.

METRIC RELATIONS ON PSEUDO-EUCLIDEAN HYPERSPHERES

(SUMMARY)

In this paper we establish two important metric relations in the spheric triangles containing in a unic form, the relations we know for the case of usual spheres in the euclidean space, or for spheres of iq radius.

The generalisation was possible using the solutions system presented in Section I.

INVERSA GENERALIZATĂ A UNEI MATRICI BOOLEENE

DE

E. BURLACU

În semn de omagiu profesorului V. Mioc la a 70-a aniversare

1. INTRODUCERE

Problema inversei unei matrici booleene a fost studiată de Acad. Gr. C. Moisil în [3] de Wederburn în [6] de Rutherford în [5] S. Rudeanu în [4] și E. Burlacu în [2].

Acad. Gr. C. Moisil demonstrează că o matrice patrată Mn cu elemente $a_{ij} \in L_2$ (unde L_2 este o latice distributivă) este inversabilă dacă și numai dacă M_n este o matrice de permutare și în acest caz inversa ei este M_n^T (transpusa matricii M_n).

Wederburn demonstrează că o matrice $M_n = \|a_{ij}\|$ $i, j = 1, 2, \ldots, n$ cu $a_{ij} \in B$ unde B este o algebră Boole oarecare, este inversabilă dacă elementele sale satisfac relațiile

$$\bigcup_j a_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

$$a_{ij} \cap a_{kj} = 0 \qquad i \neq k \tag{2}$$

$$\bigcup_i a_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

$$a_{ik} \cap a_{kj} = 0 \qquad k \neq j \tag{4}$$

R. D. Rutherford arată că dacă (1) și (2) au loc atunci sînt satisfăcute (3) și (4) și reciproc, deci o matrice este inversabilă dacă sînt satisfăcute fie relațiile (1) și (2) fie (3) și (4)

2. INVERSA GENERALIZATĂ A UNEI MATRICI BOOLEENE ÎN SENSUL LUI A. BJERHAMMER.

Fie A_{nn} o matrice inversabilă cu elemente dintr-o algebră Boole oarecare. Matricea A_{nn} fiind inversabilă satisface condițiile (1) și (2) sau echivalentele lor

(3) şi (4). Vom împărţi matricea A_{nn} în două submatrici dreptunghiulare B_{rn} şi C_{pn} unde $p+r=n$, Adică

$$A_{nn} = \left\| \begin{matrix} B_{rn} \\ C_{pn} \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

Matricea A_{nn} fiind inversabilă admite ca inversă A^T_{nn} ce verifică relaţiile

$$A_{nn} \cdot A^T_{nn} = A^T_{nn} A_{nn} = E_{nn} \tag{6}$$

Dar :

$$A^T_{nn} = \| B^T_{rn} \quad C^T_{pn} \| \tag{7}$$

şi atunci relaţiile (6) devin :

$$\left\| \begin{matrix} B_{rn} \\ C_{pn} \end{matrix} \right\| \| B^T_{rn} \quad C^T_{pn} \| = E_{nn} \tag{8}$$

$$\| B^T_{rn} \quad C^T_{pn} \| \left\| \begin{matrix} B_{rn} \\ C_{pn} \end{matrix} \right\| = E_{nn} \tag{9}$$

α in care obţinem

$$B_{rn} \cdot B^T_{rn} = E_{rr} \tag{10}$$

$$B_{rn} \cdot C^T_{rn} = O_{rp} \tag{11}$$

$$C_{pn} \cdot B^T_{rn} = O_{pr} \tag{12}$$

$$C_{pn} \cdot C^T_{pn} = E_{pp} \tag{13}$$

iar din (9) obţinem

$$B^T_{rn} \cdot B_{rn} \cup C^T_{pn} C_{pn} = E_{nn} \tag{14}$$

din care deducem

$$B^T_{rn} \; B_{rn} \subset E_{nn} \tag{15}$$

$$C^T_{pn} \; C_{pn} \subset E_{nn} \tag{16}$$

Din unicitatea inversei matricii A_{nn} rezultă unicitatea inverselor B_{rn} şi C_{pn} care sînt respectiv B^T_{rn} , C^T_{pn}. Vom numi B^T_{rn} inversa generalizată a matricii B.

Inversa generalizată este determinată în mod univoc de relaţiile (10) şi (15).

Cu privire la existenţa şi unicitatea inversei generalizate a unei matrici dreptunghiulare A_{mn}, cu $m<n$ dăm următoarea teoremă :

Teorema 2. 1. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca matricea A_{mn} să admită ca inversă generalizată matricea A^T_{mn} este ca să fie verificate relaţiile :

$$\bigcup_j a_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{17}$$

$$a_{ij} \cap a_{kj} = 0 \qquad i \neq k \tag{18}$$

$$a_{ji} \cap a_{jk} = 0 \qquad i \neq k \tag{19}$$

Demonstrație: Dacă $A_{mn}\, A_{mn}^T = E_{mm}$ rezultă

$\bigcup_j a_{ij} \cap a_{jk}^T = \bigcup_j a_{ij} \cap a_{kj} = 0$ pentru $i \neq k$ deci $a_{ij} \cap a_{kj} = 0$ pentru $i \neq k$ și

$\bigcup_j a_{ij} \cap a_{ji}^T = \bigcup_j a_{ij} \cap a_{ij} = \bigcup_j a_{ij} = 1$ din (15) deducem

$\bigcup_j a_{ij}^T \cap a_{jk} = \bigcup_j a_{ji} \cap a_{jk} = 0$ $i \neq k$ deci $a_{ji} \cap a_{jc} = 0$ pentru $i \neq k$

Presupunem acum că elementele matricii A_{mn} verifică relațiile (17) ,(18) și (19). O astfel de matrice poate fi completată pînă la o matrice de ordinul n inversabilă. Matricile $C_{n-m,\,n}$ care prelungesc matricea A_{mn} la o matrice patrată de ordinul n satisfac și ele condițiile (17), (18) și (19). Din mulțimea posibilităților de prelungire a matricii A_{mn} la o matrice patrată de ordinul n inversabilă vom numi prelungirea simplă a matricii A_{mn} prelungirea dată de următorul procedeu

$$a_{m+k,\,s} = \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{m+k-1} a_{is} \bigcup \bigcup_{j<s} a_{m+k,\,j} \right)} \tag{20}$$

Să arătăm că prelungirea simplă a matricii A_{mn} dată de (20) satisface condițiile (17)–(19) iar matricea A astfel prelungită este inversabilă.

Vom considera mai întîi matricea prelungită cu o singură linie după regula (20). Vom arăta că condițiile (17) (18) și (19) sînt satisfăcute în cazul matricii obținute de dimensiune m+1, n. Considerînd matricea obținută ca matrice inițială prin (20) o prelungim prin adăugarea unei noi linii și așa mai departe pînă cînd vom obține o matrice patrată n×n. Prin urmare este suficient să verificăm condițiile (17), (18), (19) pentru prima prelungire cu o singură linie a matricii inițiale.

Fie a_{m+s} și a_{m+t} două elemente aparținînd aceleași linii. Putem presupune fără a restrînge generalitatea că $s<t$.

$$a_{m+1,\,s} \cap a_{m+1,\,t} - a_{m+1,\,s} \cap \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{m} a_{it} \bigcup \bigcup_{j=1}^{t-1} a_{m+1,j} \right)} =$$

$$= a_{m+1,\,s} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} \bar{a}_{it} \cap \bigcap_{j=1}^{t-1} \bar{a}_{m+1,\,j} \right) = 0$$

deoarece $\bigcap_{j=1}^{t-1} \bar{a}_{m+1,\,j}$ conține și pe $\bar{a}_{m+1,\,s}$ și astfel condiția (18) este satisfăcută.

Fie acum $a_{s,\,r}$ cu $s = 1, 2, \ldots, m$ și $r = 1, 2, \ldots, n$

$$a_{m+1,\,r} \cap a_{s,r} = \left(\overline{\bigcup_{i=1}^{m} a_{ir} \bigcup \bigcup_{t=1}^{r-1} a_{m+1,\,t}} \right) \cap a_{s,\,r} =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{m} \bar{a}_{ir} \cap \bigcap_{t=1}^{r-1} \bar{a}_{m+1,\,t} \cap a_{s,\,r} = 0$$

deoarece $\bigcap_{i=1}^{m} \bar{a}_{ir}$ conține pe $\bar{a}_{s,r}$, deci și (19) este satisfăcută.

În continuare vom introduce notațiile

$$S_j = \bigcup_{i=1}^{m} a_{ij} \text{ pentru } j = 1, 2, \ldots, n$$

După (20) avem:

$$a_{m+1,1} = \bar{S}_1$$

$$a_{m+1,2} = \overline{S_2 \cup S_1} = S_1 \cap \bar{S}_2$$

$$a_{m+1,3} = \overline{S_3 \cup \bar{S}_1 \cup \overline{S_2 \cup \bar{S}_1}} = \overline{S_3 \cup S_1} \cap S_2 \cup \bar{S}_1 = \bar{S}_3 \cap \bar{S}_1 \cap (S_2 \cup \bar{S}_1) =$$

$$= S_1 \cap S_2 \cap \bar{S}_3$$

Prin urmare obținem $a_{m+1,r} = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_{r-1} \cap \bar{S}_r$ pentru $r = 1, 2, \ldots, n$.

Pentru a arăta că $\bigcup_{j=1}^{n} a_{m+1,j} = 1$ vom folosi expresia obținută pentru termenul general din linia m+1. Avem:

$$a_{m+1,1} \cup a_{m+1,2} = \bar{S}_1 \cup (S_1 \cap \bar{S}_2) = \overline{S_1 \cap S_2}$$

$$a_{m+1,1} \cup a_{m+1,2} \cup a_{m+1,3} = \overline{S_1 \cap S_2} \cup (S_1 \cap S_2 \cap \bar{S}_3) = \overline{S_1 \cap S_2 \cap S_3}$$

continuînd calculele obținem:

$$\bigcup_{j=1}^{n} a_{m+1,j} = \overline{\bigcap_{j=1}^{n} S_j} = \overline{\bigcap_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{i=1}^{m} a_{ij} \right)}$$

iar $\bigcap_{j=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{m} a_{ij}$ este o reuniune de termeni de forma

$$a_{i_1,1} \cap a_{i_2,2} \cap \ldots \cap a_{i_n,n} \qquad (*)$$

unde $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sînt elementele mulțimii $\{1, 2, \ldots, m\}$ cum $m < n$ fiecare termen de forma (*) conține ce puțin două elemente cu primii indici egali, fie de exemplu $i_j = i_k$ deci $a_{i_j,j} \cap a_{i_k,k} = 0$ de unde $\bigcap_{j=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{m} a_{ij} = 0$ și deci $\bigcup_{j=1}^{n} a_{m+1,j} = 1$ adică condiția (17) este satisfăcută.

Complectînd cele $n - m$ linii după regula dată de (20) vom obține o matrice A_{nn} inversabilă care admite ca inversă unică matricea A^T_{nn} în care submatricile A_{pn} și C_{rn} admit ca inverse matricile A^T_{pn} și C^T_{rn} care satisfac relațiile (10) și (15).

Presupunem că mai există matricea X_{nm} pentru care (10) și (15) sînt satisfăcute și atunci din

$$X_{nm} \supset A^T_{mn} \cdot A_{mn} X_{nm} = A^T_{mn} E = A^T_{mn}$$

adică

$$X_{nm} \supset A^T_{mn}$$

și din

$$X_{nm}A_{mn} \subset E_{nn} \tag{21}$$

înmulțind la dreapta cu A^T_{mn} obținem

$$X_{nm}A_{mn}A^T_{mn} \subset E_{nn}A^T_{mn} = A^T_{mn}$$

adică

$$X_{nm} \subset A^T_{mn} \tag{22}$$

Din a (21) și (22) rezultă $X_{nm} = A^T_{mn}$ adică unicitatea inversei generalizată a matricii dreptunghiulare $A_{mn}(m<n)$ în cazul cînd elementele matricei A_{mn} satisfac relațiile (17)—(19).

3. INVERSA GENERALIZATĂ A UNEI MATRICI BOOLEENE ÎN SENSUL LUI PENROSE

T e o r e m a 3.1. Dacă sistemul de ecuații

$$AXA = A \tag{23}$$

$$XAX = X \tag{24}$$

$$(AX)^T = AX \tag{25}$$

$$XA^T = (XA) \tag{26}$$

admite o soluție, atunci acea soluție este unică și o vom numi inversa generalizată a matricii A în sensul lui Penrose.

Demonstrație: Ecuațiile (24) și (25) sînt echivalente cu o singură ecuație

$$XX^TA^T = X \tag{27}$$

pentru că

$$XX^TA^T = X(AX)^T = XAX = X$$

La fel din (23) și (26) obținem

$$XAA^T = A^T \tag{28}$$

Prin urmare este suficient să găsim matricea X care satisface ecuațiile (27) și (28). Un asemenea X va exista dacă poate fi găsită o matrice B care să satisfacă egalitatea

$$BA^TAA^T = A^T \tag{29}$$

atunci

$$X = BA^T$$

satisface ecuația (28). Dar cum (28) implică și relația $A^TX^TA^T = A^T$ și cum $BA^TX^TA^T = BA^T$ rezultă că $X = BA^T$ satisface și ecuația (27).

Arătăm acum unicitatea lui X. Presupunem că există două soluții X și Y pentru sistemul inițial de ecuații matriciale, deci și pentru ecuațiile (27) și (28).

$$Y=A^TY^TY \qquad X=XX^TA^T$$

$$A^T=A^TAY \qquad A^T=XAA^T$$

Dar

$$X=XX^TA^T=XX^TA^TAY=XAY=XAA^TY^TY=A^TY^TY=Y$$

adică

$$X=Y$$

Această soluție numită inversa generalizată a matricii A o notăm cu A^+ deci

$$X=A^+ \tag{29}$$

Teorema 3. 2. Inversa generalizată a inversei generalizate este matricea însăși, adică

$$(A^+)^+=A \tag{30}$$

Considerăm din nou sistemul matricial (23)—(26) a cărui soluție este A^+ și vrem să găsim inversa matricii A^+ adică o matrice S care să verifice sistemul

$$XSX=X$$

$$SXS=S$$

$$(XS)=XS$$

$$(SX)=SX$$

Ceea ce înseamnă că matricea S va fi inversa generalizată a matricii X. Cum $S=A$ verifică această ecuație, rezultă că matricea A este inversa generalizată a lui X adică:

$$X^+=A \text{ sau } (A^+)^+=A$$

Observații:

a) În cazul cînd matricea A este o matrice de permutare atunci inversa generalizată a sa coincide cu inversa obișnuită adică

$$A^+=A^T$$

Fie relația

$$AXA=A$$

pe care o înmulțim la stînga și la dreapta cu A. Obținem

$$A^TAXAA^T=A^TAA^T.$$

de unde rezultă că

$$X=A^T$$

b) Inversa generalizată definită de relațiile (10) și (15) satisface ecuațiile lui Penrose, deci și în acest caz cele două inverse se coincid.

ОБОБЩЕННАЯ ОБРАТНАЯ МАТРИЦА ДЛЯ БУЛЕВСКОЙ МАТРИЦЫ

(РОЗЮМЕ)

В работе вводится понятие обобщенной обратной матрицы по *Гнерхамар* — у и *Пенросе* — у для случая булевской матрицы.

Рассматривается прямоугольная матрица A_{mn}, $m<n$ и доказывается что если

(I) $\bigcup_j a_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \ldots, m$

(2) $a_{ij} \cap a_{kj} = 0 \quad i \neq k$

(3) $a_{ij} \cap a_{ik} = 0 \quad j \neq k$

то матрица A_{mn} обладает обратной равной A^T_{mn} (транспонированная ватрица).

Во второй части работы вводится понятие обобщенной обратной по *Пенросе* —у. Оказывается что обратная матрица по *Гиерхамар* —у совпадает с обратной матрицы по *Пенросе* —у.

DIE VERALLGEMEINERTE INVERSE EINER BOOLESCHEN MATRIX

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der Arbeit wird der Begriff der verallgemeinerten Inversen einer Booleschen Matrix nach Bjenhammar und Penrose eingeführt.

Es wird eine rechteckige Matrix A_{mn} mit $m<n$ angenommen und es wird beweisen, dass wenn

(1) $\bigcup_j a_{ij}=1 \quad i=1, 2, \ldots, m$

(2) $a_{ij} \cap a_{kj} = 0 \quad i \neq k.$

(3) $a_{ij} \cap a_{ik} = 0 \quad j \neq k.$

dann hat die Matrix A m n als Inversen die Matrix A^T_{mn} (die transponierte Matrix der Matrix A_{mn}).

Im zweiten Teil der Arbeit wird der Begriff des verallgemeinerten Inversen nach Penrose eingeführt. Es wird gezeigt, dass die verallgemeinerte Inverse nach Bjenhammar mit der verallgemeinerten Inversen nach Penrose koinzidiert.

FUNCȚII INTRINSECI PE ALGEBRE POLINOMINALE

DE

P. N. IZVERCIANU

Distins omagiu profesorului V. Mioc cu ocazia împlinirii vîrstei de 70 ani.

1. Scopul notei de față este caracterizarea funcțiilor intrinseci definite pe o algebră generată de un polinom, peste cîmpul real, de forma $\varphi(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda_{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$, $\alpha_i \in R$. Vom nota această algebră cu H. Algebra H este o algebră liniară, asociativă, comutativă cu element unitate și admite o bază ciclică, [1].

2. În studiul funcțiilor definite pe o astfel de algebră vom considera numai cazul cînd algebra este semisimplă (radicalul este zero), condiția echivalentă cu faptul că polinomul $\varphi_{(\lambda)}$ are una din formele

$$(1)\quad \varphi(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k) \text{ sau } (2)\ \varphi(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k) \prod_{j=1}^{r} (\lambda^2 + b_j\lambda + c_j)$$

unde $b_j^2 - 4_j c < 0$ și $p + 2r = n$

Rezultatele care vor fi stabilite rămîn valabile, în general, pentru orcie algebră liniară, asociativă, comutativă semisimplă $\cup$ peste cîmpul real, deoarece o astfel de algebră întotdeauna este polinomială, [2].

Definiția 1: Fie G grupul automorfismelor algebrei H. Vom spune că o funcție $F : D \to H$, unde $D \subseteq H$, este intrinsecă pe D dacă oricare ar fi $\Omega \in G$, $x \in D$ avem

1. $\Omega x \in D$
2. $F(\Omega x) = \Omega F(x)$

Definiția 1 este echivalentă cu comutativitatea următoarei diagrame

$$(3)\quad \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\Omega} & H \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ H & \xrightarrow{\Omega} & H \end{array}$$

adică $F(\Omega x) = \Omega F(x)$, $\forall x \in H$.

3. Dacă algebra H este generată de un polinom de forma (1), atunci $\exists$ un element $l_2 \in H$ astfel încît $\varphi(l_2)=0$ și $l_1=l_2^0, l_2, l_2^2, \ldots, l_2^{n-1}$ constituie o bază pentru H.

Propoziția 1. Dacă algebra H este generată de un polinom de forma (1), atunci H este suma directă a n subalgebre H_k, $k=\overline{1,n}$, izomorfe cu algebra numerelor reale, R.

Demonstrație. Algebra H avînd ordinul $n \geqslant 2$, în acest caz, admite divizori ai lui zero corespunzători factorilor ireductibili $\lambda - \lambda_k$ și astfel avem n clase de divizori ai lui zero. Deci, algebra H are n ideale $\omega_k = l_2 - \lambda_k l_1$, $k=\overline{1,n}$, de divizori ai lui zero, obținuți înmulțind pe ω_k cu un element oarecare $x \in H$.

Un ideal oarecare $\omega_k x$ are forma

$$\omega_k x=(l_2-\lambda_k l_1)\ (x_1 l_1+x_2 l_2+\ldots+x_u l_2^{n-1})=[(-1)^{n-1}\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_u x_u-\lambda_k x_1]\cdot l_1+$$

$$+\ldots+[x_{n-1}+(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)x_n]\cdot l_2^{n-1}$$

Căutăm elementele idempotente ale idealelor $\omega_k \cdot x$, $k=\overline{1,n}$, și fie ele θ_k.

Este clar că $\theta_k\theta_h=0$, $K \neq k$, $\theta_k^2=\theta_k$

Mulțimea $H_k=\{\omega_k x \mid x \in H\}$ este o subalgebră a algebrei H, iar aplicația $\psi : H_k \to R$ definită prin $\varphi(\theta_k)=1$ este o aplicație amorfă bijectivă și $H_k \cap H_l = \{0\}, k \neq l$.

Am obținut astfel că $H=H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n$ iar un element $x \in H$ se exprimă în mod unic sub forma

$$x=x_1'+x_2'+\ldots+x_n',\ x_k' \in H_k.$$

Definiția 2: Dacă algebra $H=H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n$ fie G grupul automorfismelor algebrei H și $F : H \to H$

Atunci dacă

1. $\Omega H_k = H_k$
2. F este intrinsecă dacă $F(\Omega x)=\Omega F(x)$

$$\forall \Omega \in G.$$

Propoziția 2. O funcție $F : H \to H$, unde H este o algebră generată de polinomul (1) este intrinsecă pe H.

Demonstrație. Este cunoscut faptul că singurul automorfism al algebrei numerelor reale este automorfismul identic. Deci grupul G este format în acest caz numai din automorfismul identic. Însă $H=H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n$ unde H_k sînt algebre simple izomorfe cu algebra numerelor reale și atunci deoarece $F_k : H_k \to H_k$ sînt funcții intrinseci, putem construi o funcie,

$$F=F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n$$

unde $F : H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n \to H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n$ este definită prin $F(x) = F_1(x_i)+F_2(x_2')+\ldots+F_n(x_n')$ și deci, [3], funcția F este intrinsecă pe H și reciproc.

4. Dacă algebra H este generată de un polinom de forma (2) atunci $\exists$ un element $l_2 \in H$ astfel încît $\varphi(l_2)=0$ unde l_1 este elementul unitate al algebrei, iar $l_1=l_2^0, l_2, l_2^2 \ldots l_2^{n-1}$ constituie o bază pentru H.

P r o p o z i ţ i a 3. Dacă algebra H este generată de un polinom de forma (2) atunci H este suma directă a r algebre H'_j, $j=\overline{1, r}$, izomorfe cu algebra numerelor complexe şi a p algebre H_k $k=\overline{2r+1,n}$ izomorfe cu algebra numerelor reale.

Demonstraţie. În mod analog ca în propoziţia 1 algebra H admite divizori ai lui zero corespunzători factorilor ireductibili $\lambda-\lambda_k$, $\lambda^2+b_j\lambda+c_j$ şi prin urmare avem $p+r$ clase de divizori ai lui zero.

Un ideal oarecare al algebrei H are una din formele

$$\omega_k=l_2-\lambda_k l_1, k=\overline{2r+1, n}$$

respectiv

$$\omega'_j=l_2^2+b_j l_2+c_j l_1, \quad j=\overline{1, r}$$

obţinut prin înmulţirea lui ω_k, ω'_j cu un element oarecare $x \in H$.

$$\omega_k x=(l_2-\lambda_k l_1)(x_1 l_1+x_2 l_2 \ldots +x_n l_2^{n-1})$$

$$\omega'_j x=(l_2^2+b_j l_2+c_j l_1)(x_1 l_2+x_2 l_2+\ldots +x_n l_1^{n-1})$$

Fie θ'_j, $(i\theta'_j)^2=-\theta'_j$ respectiv θ_k, unde $i^2+1=0$, elementele idempotente ale idealelor $\omega'_j x$, $\omega_k x$. Este evident că $\theta'_j\theta'_k=0$ $\theta_l\theta_k=0$, $\theta'_j=0$, $s\neq k$, $k\neq l$, $j\neq h$. Însă $H_k=\{\omega_k x \mid x\in H\}$ şi $H'_j=\{\omega'_j x \mid x\in H\}$ sînt subalgebre ale algebrei, iar aplicaţiile $\psi: H_k\to R$ $\psi': H'_j\to C$ definite prin $\psi(\theta_k)=1$ $\psi'(\theta'_j)=1$ $\psi'(i\theta'_j)=i$, $i^2+1=0$ sînt aplicaţii omomorfe bijective şi $H_k\cap H_j=\{0\}$, $H_k\cap H'_j=\{0\}$ $H'_j\cap H'_l=\{0\}$, $k\neq j$, $\overline{l\neq j}$, $s\neq k$

Am obţinut astfel că

$$H=\left(\bigoplus_{j=1}^{r} H'_j\right)\oplus\left(\bigoplus_{k=2r+1}^{n} H_k\right)$$

P r o p o z i ţ i a 4. O funcţie $F: H\to H$, unde H este o algebră generată de polinomul (2) este intrinsecă pe $H=\left(\bigoplus_{j=1}^{r} H'_j\right)\oplus\left(\bigoplus_{k=2r+1}^{n} H_k\right)$ dacă $F_j(\overline{z_j})=\overline{F_j(z_j)}$ $j=\overline{1, r}$.

Demonstraţie. Este cunoscut faptul că, în acest caz, singurul automorfism al algebrei H, diferit de automorfismul identic, este automorfismul care duce orice element $z_j\in H'_j$ în conjugatul său $\overline{z_j}\in H'_j$

Atunci grupul G este format din automorfismul identic şi automorfismul $\Omega z_j=\overline{z_j}$ iar condiţia ca funcţia F_j să fie intrinsecă este ca $F_j(\overline{z_j})$ să fie definită cînd $F_j(\overline{z_j})$ este definită şi $\overline{F_j(z_j)}=F_j(\overline{z_j})$

Putem construi o funcţie

$$F:\left(\bigoplus_{j=1}^{r} H'_j\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=2r+1}^{n} H_j\right)\to\left(\bigoplus_{j=1}^{r} H'_j\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=2r+1}^{n} H_j\right)$$

definită prin

$$F(x)=F(z_1+z_2+\ldots +z_r+x'_{2r+1}+x'_{2r+2}+\ldots +x'_n)=F_1(z_1)+F_2(z_2)+$$

$$+\ldots +F_p(z_p)+F_{2r+1}(x'_{2r+1})+\ldots +F_n(x'_n) \quad \text{unde} \quad x=z_1+z_2+\ldots +z_p+$$

$+x'_{2r+1}+\ldots +x_n\in H$ iar exprimarea este unică şi deci ,[3], funcţia F este intrin-

secă pe H și reciproc.
Este clar că

$$F=F_1\oplus F_2\oplus\ldots\oplus F_nF_{2r+1}\oplus\ldots\oplus F_n$$

În cazul de mai sus automorfismul $\Omega\xi G$ diferit de automorfismul identic lasă invariante elementele algebrelor H_k și produce o rotație în jurul originii a planelor complexe π_j, $j=\overline{1,r}$.

Matricea transformării T va avea forma

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & P_1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & P_r \end{bmatrix}$$

unde P_j, $j=\overline{1,r}$. sînt matrici ortogonale 2×2.
Propoziția 5. Dacă algebra U este o algebră liniară cu element unitate, asociativă, comutativă, semisimplă peste cîmpul real R, atunci o funcție $F: U\to U$ este intrinsecă pe U dacă și numai dacă funcțiile $F_k: U_k\to U_k$, $k=\overline{1,u}$ sînt intrinseci.

Propoziția 5 este o consecință directă a propozițiilor 1, 2, 3 și 4.

BIBLIOGRAFIE

[1]. Enescu I.: Asupra algebrelor polinomiale (I) Buletinul Institutului politehnic Iași, Tom XI (XV) Fasc. 3—4, 1965 pag. 25—28
[2]. Enescu I.: Asupra algebrelor polinomiale (II) Buletinul Institutului politehnic Iași, Tom XII (XVI) Fasc. 1—2, pag. 18—20
[3]. Cullen C. G. și Hall C. A.: Functions on semi-simple algebras. Americ. Math. Monthly 1967, p. 14—19
[4]. Rinehart R. F.: Elements of a theory of intrinsec functions on algebras Duke Math. Journal, 1960
[5]. Hall C. A.: Intrinsec functions on semi-simple algebras Canâd Journal of Mathe. vol. XIX Nr. 3, 1967, pag. 590—598

ВНУТРЕННИЕ ФУНКЦИИ В МНОГОЧЛЕННОЙ АЛГЕБРЕ

(РОЗЮМЕ)

В работе рассматриваются внутренние функции в многочленной полупростой алгебре порожденные многочленном $\varphi(\lambda)$ степени $n\geqslant 2$, в действительном поле, вида (1) или (2).
Из предложений 1, 2, 3, 4, 5 следуют условия при которых функция

$F : H \to H$ является внутренней в линейной алгебре с единичным элементом, ассоциативной, коммутативной полупростой H в действительном поле в смысле определений (1) и (2).

NATÜRLICHE FUNKTIONEN (INTRINSEC FUNCTIONS) IN POLYNOMIALALGEBREN

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der vorliegenden Arbeit werden die natürlichen Funktionen (intrinsec functions) von der Form (1) und (2) untersucht, die auf einer halbeinfachen Polynomialalgebra definiert sind. Die Polynomialalgebra wird durch ein Polynom $\varphi(\lambda)$ vom Grade $n \geqslant 2$ über dem reellen Zahlenkörper erzeugt.

Aus den Sätzen 1, 2, 3, 4, 5 folgen die Bedingungen, unter denen eine Funktion $F : H \to H$, im Sinne der Definition 1 und 2 natürlich ist, wobei H eine lineare Algebra ist, die über dem reellen Zahlenkörper definiert ist und Einselement besitzt und gleichzeitig assoziativ, kommutativ und halbeinfach ist.

INFLUENȚA DESORBȚIEI GAZOASE ASUPRA EMISIEI EXOELECTRONICE

DE

C. SIMOI, P. CRĂCIUN, I. COTĂESCU

I. INTRODUCERE.

În majoritatea studiilor efectuate asupra emisiei tribo-foto-stimulate de electroni, începînd cu Kramer [1] și continuînd cu lucrări mai recente [2; 4], înregistrarea emisiei s-a făcut cu ajutorul unor contori de electroni în care se introducea proba emisivă după prelucrarea mecanică (îndoire, zgîriere, întindere etc.)

Pentru a putea înregistra emisia era necesar, în toate aceste cazuri, să se elimine cît mai repede aerul din contor, fie pentru a-l înlocui cu gazul de stingere [2—4], fie pentru a folosi dispozitive de fotomultiplicare [5].

O serie de măsurători făcute de noi cu un dispozitiv special la care tratarea mecanică se putea face chiar în atmosfera de stingere a contorului, au pus în evidență faptul că procesul vidării în sine produce o emisie suplimentară apreciabilă.

Concluziile lor sînt de natură a introduce restricții obligatorii în metodica uzuală la aceste procese.

Vom prezenta în cele ce urmează rezultatele comparate ale unor măsurători de emisii exoelectronice efectuate: a) prin metoda care implică o prealabilă vidare a aerului deasupra probei, b) prin metode în care se evită această vidare, c) prin metode în care se suprimă prelucrarea mecanică înregistrîndu-se numai efectul datorit vidării.

II. OBSERVAȚII EXPERIENTALE

S-a folosit instalația schițată în fig. (1), constînd dintr-un clopot de sticlă (*k*) în cares e poate face vid, în care este montat un contor Geiger-Müller cu fereastră frontală deschisă (*c*) așezat vertical deasupra probei emisive (*p*).

Proba putea fi prelucrată mecanic sub clopot cu ajutorul unei perii rotitoare (*m*) acționată de un motoraș electric. Fereastra contorului era prevăzută cu o grilă metalică (*g*) cu 100 ochiuri/cm², montată la pămînt.

Stimularea luminoasă s-a făcut cu ajutorul a două becuri (*s*) de cîte 1,8 W fiecare, montate lateral în afară clopotului de sticlă astfel încît să ilumineze proba sub o incidență de circa 45°.

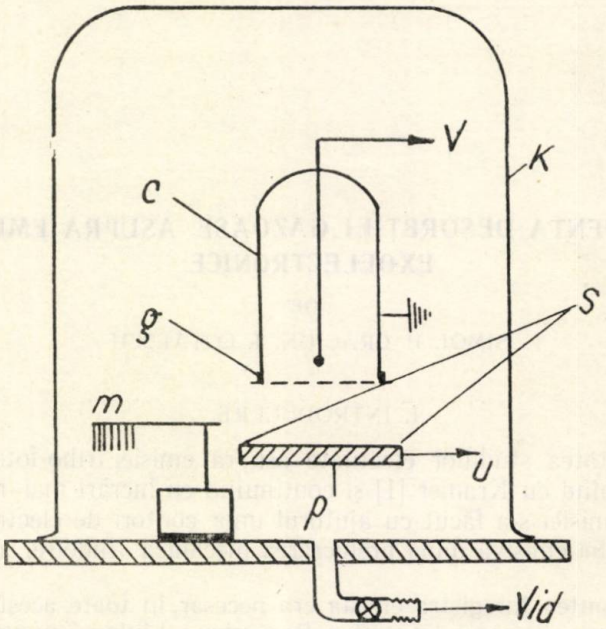


Fig. 1. *Schema dispozitivului de lucru:*
p — proba emisivă; *c* — contor Geiger-Müller deschis; *g* — grilă; *s* — sursă de lumină; *m* — perie rotitoare; *k* — clopot de sticlă.

Proba emisivă era formată dintr-o placă de Al de dimensiuni (3×4×0,1 cm) conectată la o tensiune de accelerare de $U = -90$ V. Amestecul de stingere cuprindea Argon și Butan în proporție de 9/1. Pulsurile formate în contor au fost numărate cu un numărător PP 7.

În prima serie de măsurători, proba spălată cu tetraclorură și uscată a fost introdusă în instalație și frecată timp de 15 sec cu ajutorul periei de sîrmă în aer. S-a îndepărtat aerul prin vidare și s-a introdus amestecul de stingere la presiunea de 100 mm Hg. Măsurătorile au putut fi astfel începute la 10 minute de la momentul încetării prelucrării mecanice a probei și la 5 minute de la oprirea operației de vidare.

Intensitatea emisiei, în forma vitezei de numărare dN/dt, variabilă în timp este redată în fig. (2). După circa o oră înregistrările se apropiau de valoarea fondului.

Repetîndu-se prelucrarea mecanică la diferite intervale de timp de la vidare, cu aceeași probă, în același amestec gazos de stingere, se înregistrează din nou emisii intense dar ele sînt din ce în ce mai slabe pe măsură ce intervalul de timp scurs de la operația vidării este mai mare (fig. 2—b, c, d, e).

Se poate observa că prelucrările mecanice făcute asupra probei după 6 ore de la vidare produc o emisie care diferă puțin de înregistrarea emisiei de fond.

Faptele decurg ca și cum principala cauză a emisiei tribo-foto-stimulate de electroni în condițiile experienței nu s-ar datora frecării probei, ci producerii vidului.

Într-adevăr, dacă aceeași probă este prelucrată în gazul de stingere la presiunea de 100 torr și lăsată pentru a se stinge complet emisia fără o nouă prelucrare mecanică, a fost înregistrată din nou emisia, dacă a fost eliminat gazul prin vidare și înlocuit cu alt amestec gazos la aceeași presiune.

În fig. (3) este redată curba care descrie descreșterea în timp a unei emisii de acest fel obținută la un interval de 5 zile de la prelucrarea mecanică, numai prin înlocuirea gazului de stingere, precedată de menținerea pe durata de 3 minute a unei presiuni de 10^{-1} mm Hg. Originea timpului de pe diagramă corespunde momentului începerii vidării.

În continuare au fost făcute o serie de observații în care amestecul gazos n-a mai fost înlocuit, ci numai trecut la o presiune mai redusă, deasemenea fără a repeta prelucrarea mecanică. Și în aceste experiențe au fost obținute emisi apreciabile.

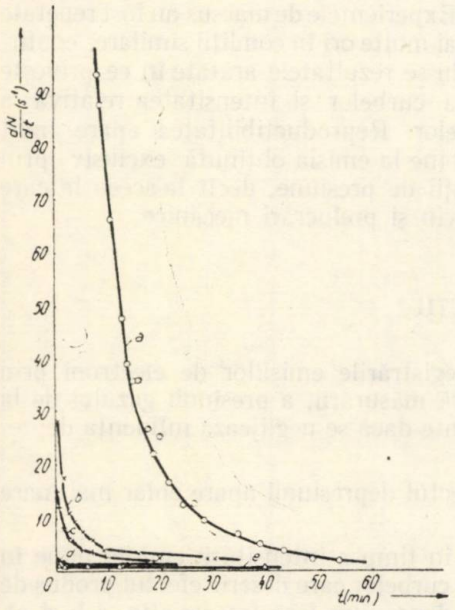


Fig. 2. *Variația în timp a emisiei înregistrate la tribostimulare*, înainte de vidare (a) și după păstrarea în amestecul de stingere timp de o oră (b), 2 ore (c), 6 ore (d) și 12 ore (e).

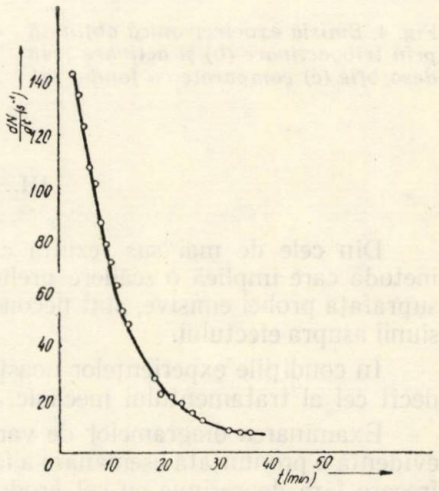


Fig. 3. *Variația în timp a emisiei activate prin desorbție gazoasă, cu schimbarea gazului de stingere.*

În fig. (4), curba (a) reprezintă emisia de fond a probei așezată într-un amestec de stingere la presiunea de 60 torr, înainte de prelucrarea mecanică de 10 s; operată în minutul 10. Curba (4b) reprezintă emisia înregistrată, fiind datorită exclusiv frecării, la circa două ore după umplerea incintei cu gaz.

În minutul 30, cînd înregistrările arătau o emisie destul de apropiată de a fondului (a) s-a operat o coborîre rapidă (6 sec) presiunii gazului de la 60 torr la 40 torr, reluînd măsurătorile.

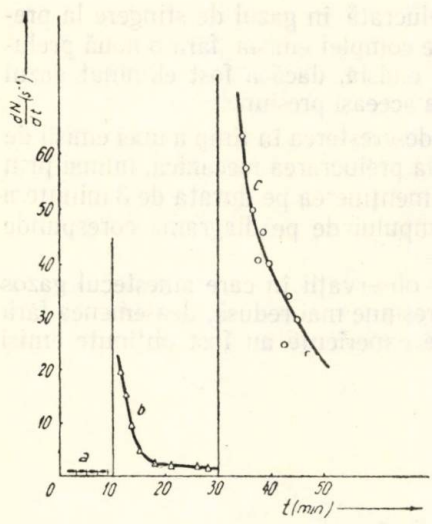


Fig. 4. *Emisia exoelectronică obținută prin triboactivare (b) și activare prin desorbție (c) comparate cu fondul (a).*

Așa cum arată curba (c) din aceeași figură, înregistrările arată o creștere puternică a emisiei. Curba (c) indică astfel un efect emisiv produs exclusiv de o variație a presiunii gazului.

Valorile din curba (c) au fost corectate în privința modificărilor eficienței de numărare a contorului, introduse de variația de presiune.

Valorile măsurate au fost înmulțite cu raportul termoemisiilor înregistrate la cele două presiuni la un filament cald așezat în locul probei.

Experiențele de mai sus au fost repetate de mai multe ori în condiții similare, confirmîndu-se rezultatele arătate în ce privește forma curbelor și intensitatea relativă a efectelor. Reproductibilitatea apare mult mai bine la emisia obținută exclusiv prin variații de presiune, decît la aceea la care intervin și prelucrări mecanice.

III. DISCUȚII

Din cele de mai sus rezultă că înregistrările emisiilor de electroni prin metoda care implică o scădere preliminară măsurării, a presiunii gazului de la suprafața probei emisive, sînt neconcludente dacă se neglijează influența depresiunii asupra efectului.

În condițiile experiențelor noastre efectul depresiunii apare chiar mai mare decît cel al tratamentului mecanic.

Examinarea diagramelor de variație în timp a intensității emisiei pune în evidență o pronunțată asemănare a formei curbelor care descrie efectul produs de frecare fără depresiune cu cel produs de depresiune fără frecare (fig. 4-b și c). Faptul sugerează probabilitatea ca emisia înregistrată să fie de același fel, diferind doar prin modul cum a fost provocată.

Cea mai probabilă corelație a scăderii presiunii gazului cu intensitatea emisiei de electroni se pare a fi mijlocită de fenomenul de desorbție superficială a moleculelor de gaz de pe suprafața probei. La separarea moleculelor de gaz de către atomii superficiali, se produce o activare energetică a atomilor, prin care se ușurează smulgerea electronului de către fotonul incident.

Mecanismul emisiei exoelectronilor este în general complicat [12—13]. Emisia produsă prin procedeul de mai sus, ar putea fi explicată prin acceptarea teoriei nivelelor locale [6—8] completată cu unele aspecte referitoare la fenomenul adsorbției la suprafața solidului [9—11].

Vecinătatea moleculelor de gaz la suprafața solidului produce perturbații în rețeaua cristalină superficială, datorită forțelor Van der Waals de adsorbție. Dacă gazul nu este chimic activ, adsorbția nu schimbă structura superficială ci are loc exclusiv prin procese reversibile.

La desorbția gazului, atomii superficiali rămîn energetic excitați, similar ca cei care ajung superficiali în urma separării lor de atomii de același fel, îndepărtați prin prelucrări mecanice (efect tribo-electronic).

Efectul de emisie apare însă, așa cum a fost arătat mai înainte [2 ; 4], cu caractere specifice metalului a cărui structură determină nivelele locale și labilitatea lor la iradiere cu lumină cu o frecvență inferioară pragului fotoelectric.

Comparînd însă excitația prin desorbție a acestor nivele cu cea efectuată prin tratări mecanice se constată că cea dintîi oferă numeroase avantaje din punctul de vedere al unui control mai sigur al parametrilor experimentali. Aceasta are drept urmare o mai bună reproductibilitatea a rezultatelor măsurătorilor, semnalată mai sus.

BIBLIOGRAFIE

[1] Kramer J., Z. Phys. 1949, 125, 739.
[2] Eckei H., Huster E., Z. Phys. 1965, 184, 24.
[3] Lintner K., Schmidt E., Z. Metall. 1954, 45, 276.
[4] Simoi C., Hrianca I., Crăciun P., phys. stat. sol. 1968, 29, 761.
[5] Scharmann A., Seibert G., Z. Phys. 1965, 183, 249.
[6] Nassenstein H., Z. Naturforsch. 1955, 10 a, 944.
[7] Seeger K., Naturwiss. 1955, 42. 66.
[8] Bohun A., Czech. J. Phys. 1955, 5, 100.
[9] Forestier H. Bull. Soc. Chim., Belg., 1958, 67, 528.
[10] Garner W. E., Bull. Soc. Chim. Belg., 1958, 67, 404.
[11] Majdanovscaja L. G., Kirovscaja A., Probl. Kinet. Kataliza 1968, 12,134.
[12] Bădărău E., Petrescu P., St. Cerc. fiz. 1959, 10, 187.
[13] Petrescu P., St. Cerc. fiz., 1960, 11, 867.

ВЛИЯНИЕ ГАЗОВОЙ ДЕСОРБЦИИ НА ЭКСО-ЭЛЕКТРОННУЮ ЄМИССИЮ

(РОЗЮМЕ)

Путем десорбции газа с эмиссионной пробы (десорбция получающаяся во время некоторого вакуума с целью произведения измерений эксо-электронной эмиссии) ; проба является активированной и появляется дополнительная электронная эмиссия.

THE INFLUENCE OF THE GAS DESORPTION ON THE EXOELECTRONICAL EMISSION

(SUMMARY)

By the desorption processus of the gas from the exoemissive surface of the sample while producing the vacuum required to can do the measurements of the emission, the sample is activated and a additional count of the electrons emittend is obtained.

GENERALIZAREA ECUAȚIEI FUNCȚIONALE A LUI D'ALEMBERT — D.V. IONESCU ÎN IPOTEZA UNOR DEPENDENȚE DATE ÎNTRE ARGUMENTE

O. SLIMAC

Distins omagiu profesorului V. Mioc cu ocazia celei de a 70-a aniversări și profesorului O. Em. Gheorghiu la a 50-a aniversare.

Ecuația funcțională a lui D'Alembert — D.V. Ionescu

$$f(u+\lambda, v+\mu)+f(u+\lambda, v-\mu)+f(u-\lambda, v+\mu)+f(u-\lambda, v-\mu)= \\ =4f(u, v)\cdot\varphi(\lambda,\mu) \tag{1}$$

a fost soluționată de D.V.Ionescu [1] în cazul funcțiilor continue și de M. Ghermănescu [2] în cazul funcțiilor măsurabile. Oct. Em. Gheorghiu [3] a extins ecuația funcțională (1) la cazul matricilor de funcții reale de o formă specială, arătînd cum se găsește mulțimea soluțiilor continue sau măsurabile.

1. Vom generaliza ecuația funcțională (1) mărind numărul argumentelor fiecărei funcții de la două la patru:

$$F(u_1, u_2, v_1 v_2)+F(u_1, u_2, v_3, v_4)+F(u_3, u_4, v_1, v_2)+F(u_3 u_4, v_3, v_4)= \\ =4F(u_5, u_6, v_5, v_6)\cdot\Phi(u_1-u_6, u_2-u_6, v_1-v_6, v_2-v_6) \tag{2}$$

între argumente există dependențele:

$$\begin{cases} u_1-u_2=u_3-u_4=u_5-u_6 \\ v_1-v_2=v_3-v_4=v_5-v_6 \\ 2u_5=u_1+u_3 \\ 2u_6=u_2+u_4 \\ 2v_5=v_1+v_3 \\ 2v_6=v_2+v_4 \end{cases} \tag{3}$$

Considerăm funcțiile F și Φ ca fiind reale de variabile reale, ipotezele (3) avînd o interpretare geometrică dată de O. Em. Gheorghiu și B. D. Crstici [4].

Pentru soluționarea ecuației funcționale (2) cu ipotezele (3) se introduc schimbările de variabile:

$$x=u_6\,;\ y=u_1-u_5=u_2-u_6\,;\ z=u_1-u_2=u_3-u_4=u_5-u_6 \tag{4}$$

$$\xi=v_6\,;\ \eta=v_1-v_5=v_2-v_6\,;\ \zeta=v_1-v_2=v_3-v_4=v_5-v_6$$

Ţinînd seama de ipotezele (3), de schimbările (4) găsim exprimarea argumentelor u_i, v_i $(i=1, \ldots, 6)$ în funcţie de $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$:

$$\begin{array}{ll} u_1=x+y+z & v_1=\xi+\eta+\zeta \\ u_2=x+y & v_2=\xi+\eta \\ u_3=x-y+z & v_3=\xi-\eta+\zeta \\ u_4=x-y & v_4=\xi-\eta \\ u_5=x+z & v_5=\xi+\zeta \\ u_6=x & v_6=\xi \end{array} \tag{5}$$

Dacă expresiile (5) sînt utilizate în ecuaţia funcţională (2) aceasta se scrie:

$$\begin{aligned} &F(x+y+z, x+y, \xi+\eta+\zeta, \xi+\eta)+F(x+y+z, x+y, \xi-\eta+\zeta, \xi-\eta)+ \\ &+F(x-y+z, x-y, \xi+\eta+\zeta, \xi+\eta)+F(x-y+z, x-y, \xi-\eta+\zeta, \xi-\eta)= \\ &=4F(x+z, x, \xi+\zeta, \xi)\cdot\Phi(y+z, y, \eta+\zeta, \eta) \end{aligned} \tag{6}$$

Introducînd funcţiile

$$\begin{aligned} F(x+y+z, x+y, \xi+\eta+\zeta, \xi+\eta)&=f(x+y, z, \xi+\eta, \zeta)\,\Phi(y+z, y, \eta+\zeta, \eta)= \\ &=\varphi(y, z, \eta, \zeta) \end{aligned} \tag{7}$$

ecuaţia funcţională (6) devine

$$\begin{aligned} &f(x+y, z, \xi+\eta, \zeta)+f(x+y, z, \xi-\eta, \zeta)+f(x-y, z, \xi+\eta, \zeta)+ \\ &+f(x-y, z, \xi-\eta, \zeta)=f(x, z, \xi, \zeta)\cdot\varphi(y, z, \eta, \zeta) \end{aligned} \tag{8}$$

care este ecuaţia funcţională a lui D'Alembert — D. V. Ionescu (1) unde x, y, ξ, η sînt considerate variabile, iar z şi ζ parametri.

Rezultă că soluţia generală în funcţiile reale, continuă după D. V. Ionescu sau măsurabile după M. Ghermănescu are forma dată în lucrarea lui O. Em. Gheorghiu [3], unde $C, D, C', D' k, \theta$ sînt funcţii arbitrare de z şi ζ.

Dacă în această soluţie generală se fac schimbările (5) în sens invers obţinem soluţia generală continuă sau măsurabilă a ecuaţiei funcţionale (2):

$$\begin{cases} F(u_1, u_2, v_1, v_2)=0 \\ \Phi(u_1, u_2, v_1, v_2)=\text{arbitrară} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1(u_1, u_2, v_1, v_2)=(Cv_1+D)\,u_1+C'v_1+D' \\ \Phi_1(u_1, u_2, v_1, v_2)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2(u_1, u_2, v_1, v_2)=(C\cos kv_1+D\sin kv_1)\,u_1+C'\cos kv_1+D'\sin kv_1 \\ \Phi_2(u_1, u_2, v_1, v_2)=\cos kv_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_3(u_1, u_2, v_1, v_2)=(C\,\mathrm{ch}\,kv_1+D\,\mathrm{sh}\,kv_1)\,u_1+C'\mathrm{ch}\,kv_1+D'\,\mathrm{sh}\,kv_1 \\ \Phi_3(u_1, u_2, v_1, v_2)=\mathrm{ch}\,kv_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_4(u_1, u_2, v_1, v_2)=(Cv_1+D)\cos\theta u_1+(C'v_1+D')\,\mathrm{sh}\theta u_1 \\ \Phi_4(u_1, u_2, v_1, v_2)=\cos\theta u_1 \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} F_5(u_1, u_2, v_1, v_2)=(C\cos kv_1+D\sin kv)\cos\theta u_1+(C'\cos kv_1+D'\sin kv)\sin\theta u_1 \\ \Phi_5(u_1, u_2, v_1, v_2)=\cos\theta u_1.\cos kv_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_6(u_1, u_2, v_1, v_2) = (C \operatorname{ch} kv_1 + D \operatorname{sh} kv_1) \cos \theta u_1 + (C' \operatorname{ch} kv_1 + D' \operatorname{sh} kv_1) \sin \theta u_1 \\ \Phi_6(u_1, u_2, v_1, v_2) = \cos \theta u_1 \operatorname{ch} kv_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_7(u_1, u_2, v_1, v_2) = (Cv_1 + D) \operatorname{ch} \theta u_1 + (C'v_1 + D') \sin \theta u_1 \\ \Phi_7(u_1, u_2, v_1, v_2) = \operatorname{ch} \theta u_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_8(u_1, u_2, v_1, v_2) = (C \cos kv_1 + D \sin kv_1) \operatorname{ch} \theta u_1 + (C' \cos kv_1 + D' \sin kv_1) . \operatorname{sh} \theta u_1 \\ \Phi_8(u_1, u_2, v_1, v_2) = \operatorname{ch} \theta u_1 . \cos kv_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(u_1, u_2, v_1, v_2,) = (C \operatorname{ch} kv_1 + D \operatorname{sh} kv_1) \operatorname{ch} \theta u_1 + (C' \operatorname{ch} kv_1 + D' \operatorname{sh} kv_1) \operatorname{sh} \theta u_1 \\ \Phi(u_1, u_2, v_1, v_2) = \operatorname{ch} \theta u_1 \operatorname{ch} kv_1 \end{cases}$$

În soluția (9) C,D,C', D',k,θ sînt funcții arbitrare continue sau măsurabile de două variabile u_1—u_2, v_1—v_2 și care nu sînt specificate în expresiile precedente pentru a nu complica scrierea soluției generale.

2. În cele ce urmează vom soluționa ecuația funcțională (2) cu condițiile (3) în ipoteza că F și Φ sînt matrici pătratice circulare de rangul n, iar elementele sînt $2n$ funcții reale de cîte patru argumente fiecare. Soluționarea se va face deci în mulțimea funcțiilor reale continue.

Matricile pătratice de funcții cu care lucrăm sînt :

$$F \equiv \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 a_3 & \dots & a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_1 a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} a_n a_1 & & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 \dots & a_n & a_1 \end{matrix} \right\| ; \quad \Phi = b \left\| \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \dots & b_{n-1} & b_n \\ b_n & b_1 & b_2 \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_{n-1} b_n & b_1 & \dots & b_{n-3} b_{n-2} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_2 & b_3 & b_4 \dots & b_n & b_1 \end{matrix} \right\| \tag{10}$$

Datorită structurii lor rezultă că proprietatea de permutabilitate a matricilor este verificată :

$$F \cdot \Phi = \Phi \cdot F$$

Pentru a nu complica scrierea din punct de vedere tipografic considerăm în cele ce urmează că ecuația pe care o tratăm este (2), F și Φ fiind scrise după (10), iar funcțiile $a_1, \dots, a_n$ depind de cele patru argumente specificate în (2) cu condițiile (3), în mod analog pentru funcțiile $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Deci ecuația matricială (2) este echivalentă cu un sistem de n ecuații funcționale, cu $2n$ funcții necunoscute.

Fără a specifica argumentele din (2) se poate scrie sistemul :

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + a_1 + a_1 = 4(a_1 b_1 + a_2 b_n + a_3 b_{n-1} + \dots a_{n-1} b_3 + a_n b_2) \\ a_2 + a_2 + a_2 + a_2 = 4 \left((a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_n + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_3\right) \\ a_3 + a_3 + a_3 + a_3 = 4(a_1 b_s + a_2 b_2 + a_3 b_1 + \dots + a_{n-1} b_3 + a_n b_4) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n + a_n + a_n + a_n = 4(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{2n-2} + \dots + a_{n-1} b_n + a_n b_1) \end{cases} \tag{11}$$

Dacă introducem funcţiile hipercomplexe conjugate de cîte patru variabile reale

$$\begin{cases} A_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ B_1 = b_1 + b_a + \ldots + b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = a_1 + \varepsilon a_2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} a_n \\ B_2 = b_1 + \varepsilon b_2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} b_n \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} A_3 = a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \ldots + \varepsilon^{n-2} a_n \\ B_3 = b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \ldots + \varepsilon^{n-2} b_n \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{cases} A_n = a_1 + \varepsilon^n a_2 + \ldots + \varepsilon a_{.1} \\ B_n = b_1 + \varepsilon^n b_2 + \ldots + \varepsilon b_n \end{cases}$$

unde ε este o unitate hipercomplexă ce verifică ecuaţia caracteristică $\varepsilon^n = 1$ [5], [6], [7], [8], [9]. [10], [11], atunci sistemul (11) devine

$$A_i(u_1, u_2, v_1, v_2) + A_i(u_1, u_2, v_3, v_4) + A_i(u_3, u_4, v_3, v_2) +$$
$$+ A_i(u_3, u_4, v_3, v_4) = 4A_i(u_5, u_6, v_5, v_6)\ B_i(u_1 - u_6, u_2 - u_6, v_1 - v_6, v_2 - v_6)$$
$$(i = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

În (13) toate ecuaţiile sînt de aceeaşi formă, adică repetă de n ori ecuaţia (2) cu deosebirea că avem funcţii hipercomplexe de patru variabile reale pe cînd în (2) sînt funcţii reale de patru variabile reale.

Fiecărei ecuaţii funcţionale din (31) îi aplicăm acelaşi procedeu ca pentru (2) şi obţinem soluţia hipercomplexă continuă de forma (9) unde C, D, C', D', k, θ sînt funcţii hipercomplexe continue arbitrare de cîte două argumente reale fiecare.

Aceste şase funcţii hipercomplexe arbitrare introduc prin compunerea lor $6n$ funcţii reale arbitrare de două argumente reale. Spre exemplu :

$$\begin{cases} C(u_1 - u_2, v_1 - v_2) = C_1(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \varepsilon C_2(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \ldots + \\ \qquad + \varepsilon^{n-1} C(u_1 - u_2, v_1 - v_2) \\ D(u_1 - u_2, v_1 - v_2) = D_1(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \varepsilon D_2(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \ldots + \\ \qquad + \varepsilon^{n-1} D(u_1 - u_2, v_1 - v_2) \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} C'(u_1 - u_2, v_1 - v_2) = C'_1(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \varepsilon C'_2(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \ldots + \\ \qquad + \varepsilon^{n-1} C'_1(u_1 - u_2, v_1 - v_2) \\ D'(u_1 - u_2, v_1 - v_2) = D'_1(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \varepsilon D'_2(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \ldots + \\ \qquad \varepsilon_{n-1} D'_n u_1 - u_2, v_1 - v_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k(u_1 - u_2, v_1 - v_2) = k_1(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \varepsilon k_2(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \ldots + \\ \qquad + \varepsilon^{n-1} k_n(u_1 - u_2, v_1 - v_2) \\ \theta(u_1 - u_2, v_1 - v_2) = \theta_1(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \varepsilon\theta_2(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \ldots + \\ \qquad \varepsilon_{n-1}\theta_n u_1 - u_2, v_1 - v_2) \end{cases}$$

Luăm spre exemplu soluția generală pentru perechea de funcții hipercomplexe A_2 și B_2, celelalte perechi de funcții fiind conjugate cu acestea și înlocuim în soluția generală scrisă sub forma (9) pe (14), ordonînd apoi după puterile unității hipercomplexe ε. Acești termeni sînt, după (12), respectiv expresiile funcțiilor $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b$ determinîndu-se astfel elementele matricilor F și Φ din (10). De exemplu soluției $F_1\Phi$, din (9) îi corespund pentru matricile F și Φ din (10) elementele:

$$a_i(u_1, u_2, v_1, v_2)=[C_i(u_1-u_2, v_1-v_2)\cdot v_1+D_i\cdot(u_1-u_2, v_1-v_2)]\,u_1+$$
$$+C_i(u_1-u_2, v_1-v_2)\cdot v_1+D_i(u_1-u_2, v_1-v_2)\ (i=1, \ldots, n)$$
$$b_1(u_1, u_2, v_1, v_2)=1\ ;\ b_j(u_1, u_2, v_1, v_2)=0\ ;\ (j=2, 3, \ldots, n) \tag{15}$$

Deoarece în celelalte soluții din (9) intervin funcțiile $\cos\theta u_1$, $\sin\theta u_1$, $\operatorname{ch}\theta u_1$, $\operatorname{sh}\theta u_1$, $\sin kv_1$, $\cos kv_1$, $\operatorname{sh} kv_1$, $\operatorname{ch} kv_1$ este necesar ca în prealabil să scriem aceste funcții astfel ca să fie explicitate în raport cu unitatea hipercomplexă ε și puterile sale.

Pentru acestea scriem funcțiile k și θ punînd în evidență modulul și cele n-1 argumente cu ajutorul funcțiilor lui P. Appel de ordinul n [5] [8], [9];

$$\begin{cases} k=l[ap_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})+\varepsilon ap_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})+\ldots+\varepsilon^{n-1}ap_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})] \\ \theta=\rho[ap_1(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})+\varepsilon ap_2(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})+\ldots+\varepsilon^{n-1}ap_n(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})] \end{cases} \tag{16}$$

Atunci avem:

$$\begin{cases} \cos\theta u_1 = U_1+\varepsilon U_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}U_n \\ \operatorname{ch}\theta u_1 = U_1'+\varepsilon U_2'+\ldots+\varepsilon_{n-1}U_n' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\theta u_1 = V_1+\varepsilon V_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}V_n \\ \operatorname{sh}\theta u_1 = V_1'+\varepsilon V_2'+\ldots+\varepsilon_{n-1}V_n' \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} \cos kv_1 = S_1+\varepsilon_1 S_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}S_n \\ \operatorname{ch} kv_1 = S_1'+\varepsilon S_2'+\ldots+\varepsilon_{n-1}S_n' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin kv_1 = T_1+\varepsilon T_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}T_n \\ \operatorname{sh} kv_1 = T_1+\varepsilon T_2'+\ldots+\varepsilon_{n-1}T_n' \end{cases}$$

unde

$$U_r=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(\rho u_1)^{2m}}{(2m)!}ap_r(2m\beta_1, 2m\beta_2, \ldots, 2m\beta_{n-1})$$
$$U_r'=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\rho u_1)^{2m}}{(2m)!}ap_r(2m\beta_1, 2m\beta_2, \ldots, 2m\beta_{n-1}) \tag{18}$$

$$V_r=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(\rho u_1)^{2m+1}}{(2m+1)!}ap_r[(2m+1)\beta_1, (2m+1)\beta_2, \ldots, (2m+1)\beta_{n-1}]$$

$$V_r'=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\rho u_1)^{2m+1}}{(2m+1)!}ap_r[(2m+1)\beta_1, (2m+1)\beta_2, \ldots, (2m+1)\beta_{n-1}]$$
$$(r=1, 2, \ldots, n)$$

Pentru S_r, S'_r, T_r, T'_r sînt expresii analoage cu deosebirea că apar funcţiile $ap_r(2m\alpha_1, \ldots, 2m\alpha_{n-1})$ respectiv $ap\,[(2m+1)\alpha_1, \ldots, (2m+1)\,\alpha_{n-1}]$ şi în locul lui ρu_1 este lv_1.

Avem toate elementele pentru ca din soluţiile (9) să obţinem funcţiile reale a_i, b_i, ce apar în (10) prin separarea componentelor funcţiilor hipercomplexe după unitatea hipercomplexă ε şi puterile sale.

Soluţia matricială ce se obţine, de exemplu după F_3 şi Φ_3 din (9) se prezintă astfel :

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_n \\ a_n & a_1 \ldots a_{n-1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_2 & a_3 \ldots a_1 \end{Vmatrix} = \left\{ u_1 \begin{Vmatrix} C_1 & C_2 \ldots C_n \\ C_n & C_1 \ldots C_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ C_2 & C_3 \ldots C_1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} C'_1 & C'_2 \ldots C'_3 \\ C'_n & C'_1 \ldots C'_{n-1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ C_2 & C'_3 \ldots C'_1 \end{Vmatrix} \right\} \cdot \begin{Vmatrix} S'_1 & S'_2 \ldots S'_n \\ S'_n & S'_2 \ldots S'_{n-1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ S'_2 & S'_3 \ldots S'_1 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \left\{ u_1 \begin{Vmatrix} D_1 & D_2 \ldots D_n \\ D_n & D_1 \ldots D_{n-1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ D_2 & D_3 \ldots D_1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} D'_1 & D'_2 \ldots D'_{n-1} \\ D'_n & D'_1 \ldots D'_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ D'_2 & D'_3 \ldots D'_1 \end{Vmatrix} \right\} \cdot \begin{Vmatrix} T'_1 & T'_2 \ldots T'_n \\ T'_n & T'_1 \ldots T'_{n-1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ T'_1 & T'_1 \ldots T_1 \end{Vmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{Vmatrix} b_1 & b_2 \ldots b_n \\ b_n & b_1 \ldots b_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ b_2 & b_3 \ldots b_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} S'_1 & S'_2 \ldots S'_n \\ S'_n & S'_1 \ldots S'_{n-1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ S'_2 & S'_3 \ldots S'_1 \end{Vmatrix}$$

unde C,D,C',D' sînt $4n$ funcţii arbitrare reale şi continue definite de (14), iar S'_r şi T'_r, aşa după cum s-a precizat mai sus sînt date de

$$S'_r = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(lv_1)^2}{(2m)!}\, ap_r(2m\alpha_1, 2m\alpha_2, \ldots, 2m\alpha_{n-1})$$

$$T'_r = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(lv_1)^{2m+1}}{(2m+)!}\, ap_r[(2m+1)\alpha_1, (2m+1)\alpha_2, \ldots, (2m+1\alpha_{n-1}]$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n)$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Ionescu D. V., Bull. sect. st. Acad. Roum. 1947, t XXX, nr. 5. p. 264—269
[2] Ghermănescu M., *Ecuaţii funcţionale*, 1960, Acad. RSR, Bucureşti
[3] Gheorghiu O. Em., Bul. şt. tehn. IPT, t (21), 1962, p. 9—11
[4] Gheorghiu O. Em şi B. Crstici Analele Univ. Tim., Seria Şt. Mat-Fiz, v. II, 1964
[5] Appell P. Comptes Rednus Ac. Sc. Paris t 84, 1877, p. 1378
[6] Devisme J. Ann. Fac. Sc. Toulouse (III), t 25, 1933, p. 143-237
[7] Roşculeţ M. St. Cerc. Mat., t 5, nr. 3—4, 1954, p. 361—401

[8] Roşculeţ M. Bul. St. Acad. R.S.R., Secţ. St. Mat. Fiz, t. V, 1953, p. 103—145
[9] Slivinskii V. E. Dokl. ak. Nauk, t. 74, nr. 5, 1950
[10] Crstici B. Bul. St. Tehn. IPT t. 8 (22) facs. 1, 1963, p. 9—13
[11] Aczél J Lectures on funcţional equations and their applications, New York and London, Ac. Press, 1966
[12] Kuczma M. Univ. Belgrad, Publ. Fac. Electr. Serie Math. Phys. t. 130, 1964 p. 1—64
[13] Gheorghiu O. Em şi Crstici B Univ. Beograd, Publ. Fac. Electr, Serie Math. Phys. t. 210—228 (226), 1968 p. 75—79.

ОБОБЩЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ Д'АЛАМБЕРА — Д. В. ИОНЕСКУ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ ДАННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ МЕЖДУ АРГУМЕНТАМИ

(РОЗЮМЕ)

В первой части работы предлагается решение функционального уравнения (2) являющегося распространением уравнения (1) на случай четырех аргументов между которыми существуют зависимости (3). Решение дано соотношением (9).

Во второй части приводится решение уравнения (2) на множестве действительных непрерывных функций при условиях (3), но в случае когда F и Φ являются квадратными круговыми матрицами имеющие в качестве элементов действительные функции четырех действительных аргументов. Решения приводятся в виде (19).

LA GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE D'ALEMBERT — D. V. IONESCU DANS L'HYPOTHÉSE DE QUELQU ES DÉPENDENCES DONÉES E NTRE LES ARGUMENTS.

(RESUME)

Dans la première partie du travail on donne la solution de l'équation fonctionnelle (2), qui est l'éxtension de l'équation (1) au cas de quatre arguments entre lesquels il y a les dependences (3).

La solution est donnée par (9)

Dans la deuxième partie on donne la solution de l'équation (2) sur l'ensemble des fonctions réelles continues avec les conditions (3), mais dans l'hypothèse que F et Φ sont des matrices circulaire carrées ayant comme éléments des fonctions réelles de quatre arguments réels.-

Les solutions sont de la forme (19).-

Dinamica ridicării sarcinii la un pod rulant

DE

GH. SILAȘ, I. NICHITA, I. GROȘANU

Dedicăm această lucrare stimatului profesor Vasile Mioc cu ocazia împlinirii a 70 de ani.

În etapa actuală construcția podurilor rulante cu deschiderea mare, capătă o tot mai largă utilizare, motiv pentru care se impun soluții economice. Una din caracteristicile importante care contribuie la proiectarea economică a podurilor rulante este comportarea lor dinamică. Din acest motiv în lucrare se analizează dinamica ridicării sarcinii, în cazul cînd căruciorul și podul rulant rămîn fixe. Unele aspecte privind ridicarea sarcinii s-au considerat în [3], [4]. În aceste lucrări legile de mișcare ale sarcinii în diferite etape sînt impuse.

Studiul dinamicii ridicării sarcinii poate fi tratat mai exact numai dacă se consideră influența motorului de acționare [1]. De cele mai multe ori interacțiunea dintre sistemul meeanic și motorul de acționare se analizează folosind caracteristicile statice ale motoarelor electrice [2], [5]. Această presupunere concordă cu realitatea pentru regimurile staționare. Deoarece la ridicarea sarcinii regimul nestaționar este important, se impune considerarea caracteristicii dinamice a motorului de acționare pentru studiul acestui regim.

1. REGIMUL NESTAȚIONAR.

Se consideră modelul dinamic din fig. 1 pentru a determina regimul nestaționar care apare la începutul ridicării sarcinii de pe sol. Se va defini acest regim pe intervalul $0<t\leqslant t_1$, unde t_1 marchează momentul desprinderii sarcinii de pe sol. Cu K_3 s-a notat constanta elastică echivalentă a solului, cu K_2 s-a notat constanta echivalentă a cablului. Pentru acest model s-au considerat grinzile principale rigide.

Pentru intervalul $(0, t_1]$ ecuațiile de mișcare ale sistemului sînt :

$$\begin{aligned} m_2\ddot{x}_2+(K_2+K_3)\,x_2-K_2R\varphi&=0\\ J\ddot{\varphi}=M_d-K_2R(R\varphi-x_2)&\qquad(1)\\ T_d\dot{M}_d+M_d&=M_s \end{aligned}$$

În aceste ecuații M_d reprezintă cuplul dinamic, iar M_s cuplu static dezvoltat de motorul electric, iar R este raza tamburului.

În general, se ridică caracteristicile statice ale motoarelor electrice [1]. În fig. 2 este reprezentată o caracteristică întîlnită frecvent la motoarele electrice de acționare ale aparatelor de ridicat și transportat.

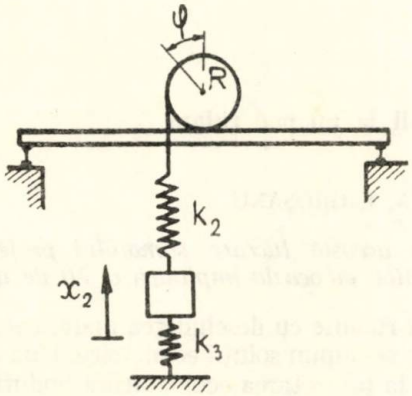


Fig. 1.

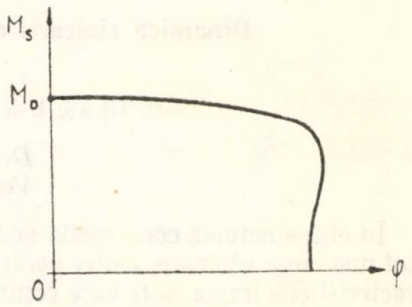


Fig. 2.

Deoarece caracteristica statică M_s are o expresie neliniară, aici se va considera numai o parte a acestei caracteristici ce poate fi liniarizată, deci

$$M_s = M_0 - M_1\dot{\varphi} \tag{2}$$

Cu această exprimare sistemul de ecuații diferențiale (1) fiind lineare cu coeficienții constanți, admite soluții particulare de forma

$$x_2 = A_2 e^{\lambda t}, \qquad \varphi = A_3 e^{\lambda t}, \qquad M = A^{\lambda t} \tag{3}$$

Cu aceste soluții ale sistemului omogen se găsesc ecuațiile

$$\begin{aligned} (K_2 + K_3 + m_2\lambda^2)A_2 - K_2RA_3 &= 0 \\ K_2RA_2 - (K_2R^2 + J\lambda^2)A_3 + A_4 &= 0 \\ M_1\lambda A_3 + (1 + T_d\lambda)A_4 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Pentru ca sistemul (4) să aibă soluții nebanale trebuie să fie îndeplinită condiția

$$\begin{vmatrix} K_2 + K_3 + m_2\lambda^2 & -K_2R & 0 \\ K_2R & -(K_2R^2 + J\lambda^2) & 1 \\ 0 & M_1\lambda & 1 + T_d\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

care reprezintă o ecuație algebrică de gradul cinci în λ. Rădăcinile acestei ecuații se vor determina aproximativ. Folosind notațiile ;

$$\Delta(\lambda^2) = \lambda_4 + 2d_1\lambda^2 + d^2 ; \quad 2\delta_1 = \frac{(K_2 + K_3)J + K_2m_2R^2}{Jm_2} ; \quad \delta_2 = \frac{K_2K_3R^2}{Jm_2} \tag{6}$$

Ecuația (5) devine

$$\Delta(\lambda^2)+\varepsilon\overline{T}_d\lambda\Delta(\lambda^2)+(K_2+K_3+m_2\lambda^2)\varepsilon\overline{M}\lambda=0 \tag{7}$$

unde :

$$T_d=\varepsilon\overline{T}_d, \qquad M_1=\varepsilon\overline{M}J \tag{8}$$

ε, reprezentînd un parametru mic, deoarece constanta dinamică de timp a motorului este $T_d<<1$ și $M_1<<J$.

Ținînd seama de existența parametrului mic în ecuația (7), pentru determinarea rădăcinilor acestei ecuații, se dezvoltă după puterile lui ε, deci :

$$\lambda=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{(i)}\varepsilon^i, \tag{9}$$

În calculele aproximative se vor folosi numai primele două aproximații.

Pentru aproximația de ordinul zero, făcînd în (7) $\varepsilon=0$ se obțin rădăcinile :

$$\lambda_s^{(0)}=0,\gamma_j^{(0)}=\pm\sqrt{-\delta_1\pm\sqrt{\delta_1^2-\delta_2}} \quad (j=1,2,3,4) \tag{10}$$

Deoarece masa m_2 a sarcinii de ridicat este mult mai mare decît masa tamburului, rezultă că $\delta_1<\delta_2$ deci primele patru rădăcini determinate cu relațiile (10) vor fi complex conjugate.

Pentru aproximația de ordinul întîi rezultă :

$$\lambda_j^{(1)}=\frac{\overline{M}(K_2+K_3+m_2\lambda_j^{(0)})}{4(\lambda_j^{(0)}+\delta_1)} \quad (j=1,\ldots,5) \tag{11}$$

Cu notațiile (8) pentru ecuația (5) se găsesc rădăcinile aproximative :

$$\lambda_j=\lambda_j^{(0)}-\frac{M_1(K_3+K_3+m_2\lambda_j^{(0)})}{4J(\lambda_j^{(0)}+\delta_1)}; \qquad (j=1,\ldots,5) \tag{12}$$

Cu ajutorul coeficienților de distribuție

$$\mu_j=\frac{A_{3j}}{A_{2j}}=\frac{K_2+K_3+m_2\lambda_j}{K_2R}\eta_j=\frac{A_{4j}}{A_{2j}}=(K_2R^2+J\lambda_j^2)\mu_j-K_2R \tag{13}$$

soluțiile generale ale sistemului (1) sînt

$$x_2=\sum_{j=1}^{5}A_{2j}e^{\lambda_j t}, \qquad \varphi=\sum_{j=1}^{5}\mu_jA_{2j}e^{\lambda_j t} \tag{14}$$

$$M_d=\sum_{j=1}^{5}\eta_jA_{2j}e^{\lambda_j t}+M_0$$

Considerînd originea deplasării x_2 plasată în poziția de echilibru, săgeata statică a arcului echivalent este :

$$f_{3s}=\frac{m_2g}{K_3} \tag{15}$$

Pentru a stabili condițiile inițiale se consideră că înainte de cuplarea motorului la rețea, cablu nu este întins. Motorul funcționează un timp pînă ce cablul se întinde, moment în care se plasează originea timpului, deci:

$$t=0, \qquad \varphi=0 \qquad \dot{\varphi}=\omega_0, \qquad M_d=M_{d0}, \qquad x=0, \qquad \dot{x}=0 \tag{16}$$

Cu aceste condiții inițiale constantele de integrare se determină din:

$$\sum_{j=0}^{5} A_{2j}=0, \qquad \sum_{j=1}^{5} \lambda_j A_{2j}=0, \qquad \sum_{j=1}^{5} \mu_j A_{2j}=0$$

$$\sum_{j=1}^{5} \mu_j \lambda_j A_{2j}=\omega_0, \qquad \sum_{j=1}^{5} \eta_j A_{2j}=M_{d0}-M_0 \tag{17}$$

Soluțiile (14) există pentru $t\in[0, t_1]$, t_1 determinîndu-se din ecuația exponențială

$$\sum_{j=1}^{5} A_{2j} e^{\lambda_j t_1} = f_{3s} \tag{18}$$

folosind metoda grafică:

2. REGIMURI STAȚIONARE

După desprinderea sarcinii de pe sol se admite că se instalează un regim staționar descris de ecuațiile:

$$m_2\ddot{x}_2 + K_2 x_2 - K_2 R\varphi = 0$$

$$J\ddot{\varphi} = M_0 - M_1\dot{\varphi} - K_2 R(R\varphi - x_2) \tag{19}$$

adică în acest regim s-a înlocuit caracteristica dinamică a motorului prin cea statică, liniarizată (2).

Alegînd pentru sistemul (19) soluțiile

$$x_2=B_1 e^{rt}, \qquad \varphi=B_2 e^{rt} \tag{20}$$

se obține sistemul

$$(K_2+m_2r^2)\,B_1 - K_2 R B_2 = 0$$

$$K_2 R B_1 - (K_2 R^2 + M_1 r + Jr^2) B_2 = 0 \tag{21}$$

care, pentru a admite soluții nebanale trebuie să îndeplinească condiția:

$$\begin{vmatrix} K_2+m_2r^2 & -K_2R \\ K_2R & -(K_2R^2+M_2r+Jr^2) \end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

Rădăcinile ecuației (22) se determină aproximativ alegînd pentru r o expresie analoagă cu (9) cu care se găsesc:

$$r_4=0; \qquad r_3^{(0)}=0; \qquad r_{1,2}^{(0)}=\pm pi; \qquad i=\sqrt{-1}; p^2=\frac{K_2}{m_2} \tag{23}$$

$$r_j = r_j^{(0)} - \frac{M_1 r_j^{(0)} + m_2 R^2 p^2 r_j^{(0)} + \dfrac{M_1 K_2}{m_2}}{J[p^2 + 3 r_j^{(0)2}]}; \quad (j = 1, 2, 3)$$

Soluțiile generale ale sistemului (19) sînt

$$x_2 = \sum_{j=1}^{4} B_{1j} e^{r_j t} + \frac{M_0}{K_2 R}; \quad \varphi = \sum_{j=1}^{4} \mu_j B_{1j} e^{r_j t} + \frac{M_0}{U_2 R^2} \tag{24}$$

unde coeficienții de distribuție ai amplitudinilor sînt definiți prin:

$$\mu_j = \frac{B_{2j}}{B_{1j}} = \frac{K_2 + m_2 r_j^2}{K_2 R}; \quad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{25}$$

Condițiile inițiale ale sistemului (19) considerate la $t=0$ sînt determinate de valorile soluției (14) la $t=t_1$.

Pentru a stabili legea de mișcare a greutății de masă m_2, se vor folosi rădăcinile aproximative ale ecuației (22) exprimate în (23). Se găsesc rădăcinile

$$r_{1,2} = -n \pm p(1+a)\, i, \quad r_3 = -b, \quad r = 0 \tag{26}$$

$$a = \frac{M_1}{2J} - \frac{M_1 K_2}{2P^2 J m_2}, \qquad b = \frac{M_1 K_2}{p^2 J m_2}$$

cu care soluțiile (22) conduc la

$$x_2 = Be^{-nt} \cos[p(1+a)t - \varphi] - B_{12} e^{-bt} + B_{14} + \frac{M_0}{K_2 R} \tag{27}$$

unde $B, \varphi, B^1{}_3$ și B_1 și B_1 sînt constante de integrare care se determină racordînd regimul nestaționar cu regimul staționar.

Din relația (27), ținînd seama că n, a și b sînt mici, pentru legea de mișcare a sarcinii, la ridicare, se obține reprezentarea din fig. 3. Înseamnă că ridicarea sarcinii apare ca o suprapunere de două mișcări: una aproape uniformă avînd legea de mișcare:

$$x_3 = \frac{M_0}{K_2 R} + B_{14} - B_{13} e - bt$$

și mișcare vibratorie, amortizată avînd legea de mișcare

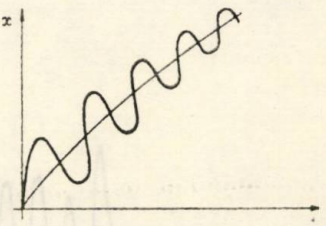


Fig. 3.

$$x_1 = B^{-nt} e \cos[p(1+a)t - \varphi] \tag{29}$$

Pulsația oscilațiilor sarcinii la ridicare este apropiată de pulsația proprie a sistemului format din cablul întins, de care este prinsă sarcina, ridicată puțin de la sol, iar tamburul rămîne fix. Acționînd tamburul, în regimul staționar, pulsația este mai mare cu $\Delta p = ap$, față de pulsația proprie. Amplitudinile maxime apar la începutul ridicării sarcinii de pe sol.

3. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE.

Verificarea rezultatelor obținute pe cale teoretică s-a făcut prin măsurători de vibrații efectuate asupra unui număr de 21 poduri rulante proiectate de I.C.P.E.H.R.

Pentru efectuarea măsurătorilor a fost folosit următorul complex format din traductor și aparate:

— Traductor seismic piezoelectric tip 4343, care funcționează ca accelerometru monodirecțional avînd următoarele caracteristici: sensibilitatea 9,54 m V/g; frecvența de rezonanță 80 k Hz; domeniul de măsurare recomandat 0—20 k Hz.

— Preamplificator integrator cu canal pentru măsurarea vibrațiilor.

— Aparate pentru măsurat vibrații RFT tip SDM 132.

— Înregistrator cu bandă magnetică tip F 7001.

— Pentru înregistrarea grafică a fenomenului, semnalele de pe banda magnetică au fost introduse în funcție de necesități în: aparat de înregistrare de tip Cardior, sau în oscilograf cu buclă tip 12 LS-1.

Amplasarea traductorului piozoelectric pentru toate podurile asupra cărora s-au măsurat vibrațiile în timpul ridicării sarcinii, a fost făcută ca în fig. 4.

Toate vibrogramele înregistrate, au forma din fig. 5.

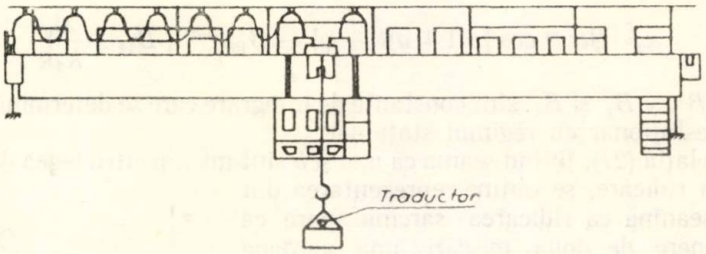


Fig. 4.

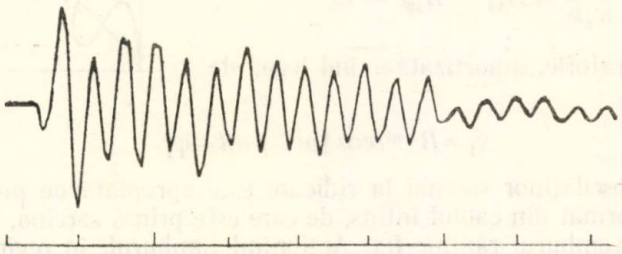


Fig. 5.

BIBLIOGRAFIE

1. Boţan N., Coman L., Sebastian L.: *Acţionarea electrică a macaralelor şi podurilor rulante*, Bucureşti, Ed. Tehnică 1968.
2. Groşanu I.: Contribuţii privind studiul mişcărilor staţionare şi nestaţionare ale sistemelor mecanice existate inerţial, acţionate de motoare electrice. Rezumatul tezei de doctorat, I. P. Timişoara, 1970.
3. Комаров М. С.: *Динамика грузоподемних машин*, Машгиз, Moskva, 1962, Kiev.
4. Murcsh B.: Unterschung uber die Bewegungsvorgänge beim Aufahren und Bremsen von electromotorisch angetriebenen Kranne und katzen unter besonderer Berucksichtigung des Einflusses der Lastpendelung. Disertation, Facultat fur Maschinenwesen der Technischen Hochschule Carol-Wilhelmina zu Braunschweig 1965.
5. Silaş Gh., Groşanu I.: Studiul regimurilor staţionare ale unui vibrator acţionat cu un motor electric de curent continuu. A II-a Conferinţă de mecanică tehnică, Bucureşti, oct. 1970.

ДИНАМИКА ПОДЪЁМА ГРУЗА НА МОСТОВОМ КРАНЕ

(РЕЗЮМЕ)

В работе присоединяется неустойчивый режим, появляющийся в начале подъёма, к устойчивому режиму подъёма, учитывая характеристики пускового двигателя.

Для неустойчивого режима использовалась динамическая характеристика двигателя в предположении статической линейной характеристики в зависимости от угловой скорости, а для устойчивого режима — статическая линеаризованная характеристика.

THE DYNAMICS OF RAISING THE WEIGHT ON AN OVERHEAD TRAVELLING-CRANE.

(SUMMARY)

In the paper the nonsteady state which appears at the beginning of the raising was connected with the raising state taking into consideration the charracteristisc of the driving motor.

For nonsteady state was used the dynamical characteristic of the motor considering the linear static characteristic function of angular speed and for steady state the linearized static characteristic.

METODA DIRECTĂ FOLOSITĂ PENTRU DETERMINAREA CONDIȚIILOR DE STABILITATE A MIȘCĂRILOR PERIODICE ÎN CAZUL SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE

DE

L. BRÎNDEU

Omagiu profesorului V. Mioc cu ocazia celei de a 70-a aniversare.

Prin proprietățile pe care le au, sistemele vibropercutante trebuie încadrate în categoria sistemelor neliniare. Cu toate acestea metodele generale ale teoriei vibrațiilor neliniare nu pot fi aplicate la studiul sistemelor vibropercutante datorită prezenței discontinuităților vitezei. De aceea este necesar să se studieze posibilitatea extinderii teoriei vibrațiilor neliniare la astfel de sisteme, prin adaptarea diferitelor metode cunoscute la caracteristicile specifice sistemelor vibropercutante.

Pornind de la această constatare am prezentat în cadrul tezei de doctorat „Contribuții privind studiul mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante" [1], susținută în anul 1970 la Institutul politehnic Timișoara, o metodă de scriere a condițiilor de stabilitate a mișcărilor periodice pentru orice sistem vibropercutant. Se generealizează metoda de studiu a stabilității sistemelor neliniare bazată pe folosirea ecuațiilor în variații [2].

Avantajul metodei constă în simplificarea calculelor intermediare necesare scrierii condițiilor de stabilitate. De asemenea spre deosebire de metodele cunoscute elaborate de Kobrinski A. E [3], Bespalova L.V. [4], Masri S. F. și Caughey T.K. [5], etc. și aplicabile numai sistemelor vibropercutante liniare între două ciocniri succesive, această metodă directă este singura ce se poate folosi și pentru caracteristici neliniare. Astfel studiul stabilității se poate face complet separat de studiul mișcării periodice.

ECUAȚIA ÎN VARIAȚII.

Se consideră sistemul vibropercutant avînd un grad de libertate și o cuplă percutantă. Mișcarea sistemului se studiază cu coordonanta q.

Între două ciocniri succesive ecuația diferențială a mișcării va fi

$$\ddot{q}+\varphi(\dot{q}, q, t)=0 \tag{1}$$

funcția $\varphi(\dot{q}, q, t)$ fiind periodică în raport cu t, cu perioada T.

Ciocnirile au loc în poziția $q=q_0$ la momentele $t=t_k(k=1,2, \ldots)$. Aceasta se poate evidenția analitic cu ajutorul legăturii unilaterale

$$f(q)=q-q_0\geqslant 0 \tag{2}$$

În mod deosebit interesează regimurile periodice de mișcare ale sistemului vibropercutant. Aceste mișcări se realizeaază cu perioada $t_{k+1}-t_k=rT$, $(r=1,2, \ldots)$. Legea mișcării periodice $\bar{q}=\bar{q}(t)$ este soluția ecuației diferențiale (1) care se obține pentru condițiile inițiale

$$\bar{q}(t_k)=q_0, \quad \dot{\bar{q}}(t_k)=\dot{q}'_c=-R\dot{q}_c \tag{3}$$

și finale

$$\bar{q}(t_{k+1})=q_0, \quad \dot{\bar{q}}(t_{k+1})=\dot{q}_c \tag{4}$$

$\dot{q}_c$ fiind viteza de la începutul unei ciocniri iar R coeficientul de restituire.

Pentru studiul stabilității, se consideră mișcări perturbate ale sistemului ce diferă de cea periodică și se obțin presupunînd că la o anumită ciocnire parametrii mișcării au alte valori decît în mișcarea periodică. Datorită acestor perturbații însă și în intervalul dintre două ciocniri succesive legile mișcării sînt perturbate. Deci se va considera o soluție a ecuației diferențiale (1) care diferă prin variația x de legea mișcării periodice $\bar{q}=\bar{q}(t)$, adică

$$q=\bar{q}+x \tag{5}$$

Dacă se face această substituție în ecuația diferențială (1) se obține ecuația în variații

$$\ddot{x}+\varphi(\dot{\bar{q}}+\dot{x}, \bar{q}+x, t)-\varphi(\dot{\bar{q}}, \bar{q}, t)=0 \tag{6}$$

Pentru simplificare se va nota $\varphi(\dot{\bar{q}},\bar{q},t)=\bar{\varphi}$. Presupunînd funcția φ dezvoltată în serie de puteri, ecuația în variații (6) se mai poate scrie

$$\ddot{x}+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\dot{\bar{q}}}\ddot{x}+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{q}}x+\Phi(\dot{x}, x, t)=0 \tag{7}$$

Aici prin Φ $(\dot{x},x,t)$ s-au notat termenii din dezvoltare care conțin puteri ale lui $\dot{x}$ și x superioare unității,

STABILITATEA MIȘCĂRILOR PERIODICE ÎN PRIMA APROXIMAȚIE.

Existența unor perturbații inițiale ale parametrilor mișcării periodice este cauza apariției unor mișcări perturbate diferite de cea periodică. Dacă, presupunînd perturbații mici, putem arăta că acestea la ciocnirile următoare descresc, atunci perturbațiile rămîn mici și tind asimptotic la zero. Mișcarea periodică va fi în acest caz asimptotic stabilă.

Pentru studiul stabilității se poate folosi ecuația (1) în care variațiile $\dot{x}$ și x se presupun mici. Se știe însă că modificînd puțin ecuația diferențaială (7), soluția se modifică oricît de puțin într-un interval de timp finit. Deoarece însă

ultimul termen din ecuația (7) este foarte mic în comparație cu ceilalți, soluția în intervalul finit rT dintre două ciocniri succesive, se poate lua chiar egală cu cea a ecuației liniarizate în variații

$$\ddot{x} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \dot{q}} \dot{x} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{q}} x = 0 \tag{8}$$

Această ecuație formal se poate scrie direct din ecuația diferențială (1) și nu necesită cunoașterea legii mișcării periodice.

Dacă ecuația diferențială (1) are caracteristica liniară, atunci ecuația diferențială (8) are coeficienți constanți.

Dacă ecuația diferențială (1) are caracteristica neliniară, atunci coeficienții ecuației diferențiale (8) sînt funcții periodice de t avînd perioada rT. În acest caz pentru scrierea ecuației diferențiale (8) este necesară cunoașterea legii mișcării periodice.

Soluția ecuației diferențiale (8) se va folosi pentru a găsi relațiile de recurență dintre perturbațiile corespunzătoare la două ciocniri succesive.

În mișcarea perturbată ciocnirea de ordinul k va avea loc la momentul $t_k+\Delta t_k$. Viteza la începutul acestei ciocniri va fi $\dot{q}_c+\Delta\dot{q}_k$, iar la sfîrșit $\dot{q}'_c+\Delta\dot{q}'_k$ unde $\Delta\dot{q}'_k=-R\Delta\dot{q}_k$. Prin urmare condițiile inițiale devin

$$q(t_k+\Delta t_k)=q_0,\ \dot{q}(t_k+\Delta t_k)=\dot{q}'_c+\Delta\dot{q}'_k \tag{9}$$

iar cele finale

$$q(t_{k+1}+\Delta t_{k+1})=q_0,\quad \dot{q}(t_{k+1}+\Delta t_{k+1})=\dot{q}_c+\Delta\dot{q}_{k+1} \tag{10}$$

Ținînd seama de forma (5) a legii mișcării perturbate și că variațiile $\dot{x}$, x sînt de același ordin de mărime ca și perturbațiile, din condițiile inițiale se obține

$$x(t_k)=-\dot{q}'_c\Delta t_k,\quad \dot{x}(t_k)=\Delta\dot{q}'_k-\ddot{q}'_c\Delta t_k \tag{11}$$

i ar din cele finale

$$x(t_{k+1})=-\dot{q}_c\Delta t_{k+1},\quad \dot{x}(t_{k+1})=\Delta\dot{q}_{k+1}-\ddot{q}_c\Delta t_{k+1} \tag{12}$$

unde $\ddot{q}_c$ și $\ddot{q}'_c$ se pot calcula din ecuația diferențială (1).

Ecuațiile de recurență liniarizate în raport cu perturbațiile se pot obține formal direct fără a integra ecuația diferențială (1). Se determină soluția ecuației în variații (8) pentru condițiile inițiale (11), iar apoi folosind condițiile finale (12) se obțin ecuațiile cu diferențe finite în perturbații necesare scrierii condițiilor de stabilitate.

STUDIUL MIȘCĂRILOR VIBROPERCUTANTE ALE UNEI MASE LIBERE CU EXCITAȚIE PERIODICĂ.

Pentru a exemplifica metoda prezentată, se consideră sistemul din fig. 1 format din masa m, simplu rezemată pe un reper ce execută vibrații periodice după legea $\xi=\xi(t)$. Mișcarea se face cu o rezistență vîscoasă proporțională cu viteza, coeficientului de proporționalitate fiind c.

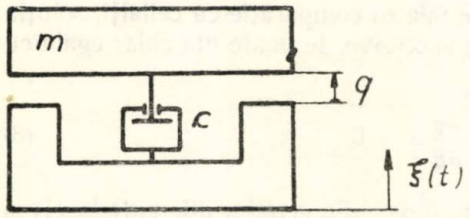


Fig. 1.

Poziția masei m se determină cu ajutorul coordonatei q a masei față de reper.

Ecuația diferențială a mișcării relative dintre masă și reper este

$$m\ddot{q}+c\dot{q}=-mg-m\ddot{\xi} \qquad (13)$$

Între masă și reper se vor produce ciocniri care pot fi evidențiate cu ajutorul legăturii unilaterale

$$f(q)=q\geqslant 0 \qquad (q_0=0) \qquad (14)$$

Ținînd seama de condițiile inițiale (3) legea mișcării între două ciocniri succesive se poate scrie

$$q=\frac{g}{h^2}\left[1-e^{-h(t-t_k)}-h(t-t_k)\right]+\frac{1}{h}\left[\dot{\xi}(t_k)-R\dot{q}_c\right]\left[1-e^{-h(t-t_k)}\right]-$$

$$-\int_{t_k}^{t}\dot{\xi}(\tau)e^{h(\tau-t)}d\tau \qquad (15)$$

unde $h=\frac{c}{m}$.

Mișcarea masei se va face cu perioada $rT(r=1,2,...)$ unde T este perioada funcției $\xi(t)$.

Dacă se introduc condițiile finale (4) în legile mișcării (15) se obțin condițiile

$$\dot{q}_c=-\frac{grT}{1+R},\quad \int_0^{rT}\dot{\xi}(t_k+\tau)e^{h\tau}d\tau=\frac{e^{hrT}-1}{h}\left[\dot{\xi}(t_k)-\frac{grT}{1+R}+\frac{g}{h}\right]-\frac{grT}{h} \qquad (16)$$

Se observă că $\dot{q}_c<0$ și nu depinde de forma funcției $\xi(t)$. Pentru ca cea de a doua condiție să fie îndeplinită este necesar ca ecuația în t_k să admită rădăcini reale.

Ecuația în variații va fi

$$m\ddot{x}+c\dot{x}=0$$

Din soluția acestei ecuații diferențiale, folosind condițiile inițiale (11) și finale (12) se obține sistemul de ecuații liniarizate în perturbații

$$R\Delta\dot{q}_k=\ddot{\xi}(t_k)\Delta t_k-\frac{h}{1-e^{-hrT}}\frac{rTg}{1+R}\Delta t_k+g\left[1+\frac{h}{1-e^{hrT}}\frac{RrT}{1+R}\right]\Delta t_{k+1} \qquad (17)$$

$$\Delta\dot{q}_{k+1}+R\Delta\dot{q}_k=-\left[g+\ddot{\xi}(t_k)\right](\Delta t_{k+1}-\Delta t_k).$$

Soluțiile sistemului de ecuații cu diferențe finite (17) se iau de forma

$$\Delta\dot{q}_k=v\beta^k, \qquad \Delta t_k=\theta\beta^k \qquad (k=1,2,...) \qquad (18)$$

Astfel se ajunge la ecuația caracteristică în β a sistemului vibropercutant

$$\beta^2+\left\{R(1+e^{-hrT})-(1+R)^2\frac{1-e^{-rT}}{hrT}\left[1+\frac{\ddot{\xi}(t_k)}{g}\right]\right\}\beta+R^2e^{-hrT}=0 \quad (19)$$

Mișcările periodice ale sistemului sînt stabile dacă toate rădăcinile ecuației caracteristice sînt în modul subunitare. Aceasta se realizează conform criteriului lui Schur [1], dacă $R<e^{\frac{1}{2}hrT}$ și valorile lui t_k calculate din cea de a doua ecuație (16), satisfac inegalitățile

$$-\frac{hrT(1-R)\,(1-Re^{-hrT})}{(1+R)^2\,(1-e^{-hrT})}-1<\frac{\ddot{\xi}(t_k)}{g}<\frac{hrT(1+Re^{-hrT})}{(1+R)\,(1-e^{-hrT})}-1 \quad (20)$$

Aceste condiții au fost analizate amănunțit în lipsa amortizării pentru cazul cînd mișcarea de excitație se realizează printr-un mecanism bielă-manivelă [7].

BIBLIOGRAFIE

1. Brîndeu L.: Contribuții privind studiul mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante. Teza de doctorat. Institutul politehnic Timișoara, 1970.
2. Brîndeu L.: Über die Bestimmung der Stabilitätsbedingungen der periodischen Bewegungen eines Stossschwingers mit einem Freiheitsgrad, Bul. Inst. Polit. din Iași, secția IV-Mecanică tehnică, tom. XVII (XXI), fasc. 3—4, 1971.
3. Kobrinski A. E.: Mehanizmî s uprughimi sviziami. Izd. Nauka, Moskva, 1964.
4. Bespalova L. V.: K teorii vibroudarnogo mehanizma. Izv. AN SSSR, OTN, Nr. 5, 1957.
5. Masri S. F., Caughey T. K.: On the Stability of the Impact Damper. Trans. of the ASME, Journal of Applied Mechanics, series E, vol, 33, Nr. 3, 1966
6. Silaș Gh., Brîndeu L., Hegedușa A.: Studiul mișcărilor vibropercutante ale une, mase libere cu excitație periodică. Studii și cercetări de Mecanică aplicată, tom 29 Nr. 5, 1970.

ПРЯМОЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ

(РЕЗЮМЕ)

Как и для нелинейных систем, применяются уравнения в вариациях полученные из дифференциальных уравнений движений, для которых выводятся граничные условия в момент удара в периодическом движении.

Определяется решение уравнения в вариациях (8) для начальных условий (11), а затем применяя конечные условия (12) получаются линейные рекурентные уравнения в возмущениях необходимые для установления условий устойчивости.

THE DIRECT METHOD USED FOR THE DETERMINATION OF STABILITY CONDITIONS OF PERIODICAL MOVEMENTS IN THE CASE OF SHOCK-VIBRATION SYSTEMS.

(SUMMARY)

As in the case of non-linear systems, there are used here equations in variation obtained directly from the differential equations of movement, for which the boundary conditions in the shocking moments from periodical movement are deduced.

The solution of equation in variation (8) is determined for the initial conditions (11) and then, using the final conditions (12) the equations of liniar recurrence in perturbations necessary for the writing of conditions of stability are obtained.

STUDIUL REGIMURILOR STAȚIONARE APROPIATE DE REZONANȚA ALE UNUI VIBRATOR INERȚIAL.

DE

I. GROȘANU

Omagiu profesorului V. Mioc cu ocazia celei de a 70-a aniversări.

În tehnica actuală vibrațiile sînt tot mai mult folosite la diferite procese și procedee tehnologice. Adesea, pentru producerea vibrațiilor se întrebuințează vibratoare inerțiale [5] care sînt acționate de motoare cu putere limitată. Pentru aceste sisteme, studiul vibrațiilor trebuie să țină seama de interacțiunea dintre vibrator și motorul de acționare [2], [4], [5], [13].

Uneori se impune ca regimurile staționare ale vibratoarelor să fie apropiate de zonele de rezonanță. În acest caz amplitudinile și neuniformitățile vitezei unghiulare sînt mari. De obicei acționarea vibratoarelor se realizează cu motoare electrice motiv pentru care aici se consideră vibratorul inerțial din fig. 1, avînd legături elastice liniare și amortizări de matură vîscoasă. Se admite că vibratorul este acționat cu un motor electric de curent continuu avînd schema de principiu prezentată în fig. 2. Rotorul motorului electric se presupune cuplat prin legături

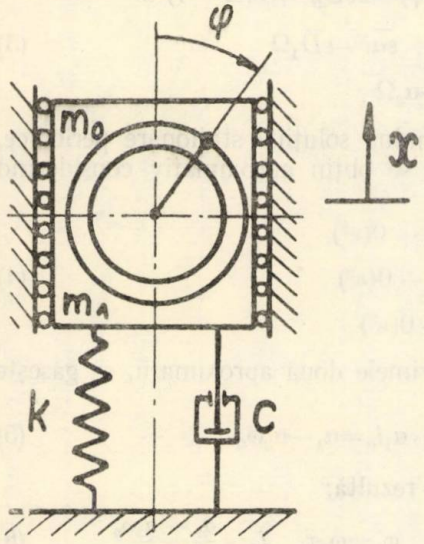


Fig. 1.

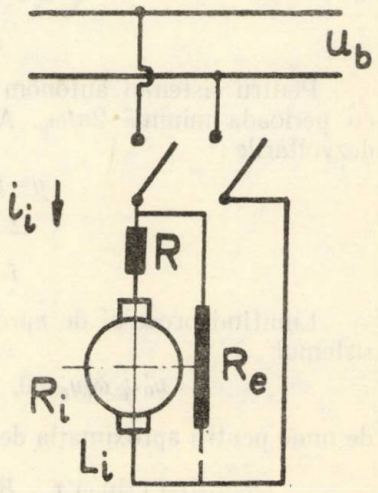


Fig. 2.

rigide de axul pe care sînt montate masele în mişcare de rotaţie ale vibratorului.

Cu aceste presupuneri, ecuaţiile sistemului electromagnetic considerat sînt :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}+c\dot{x}+kx&=m_0e_0(\ddot{\varphi}\sin\varphi+\varphi^2\cos\varphi)\\ I\ddot{\varphi}+c_1\dot{\varphi}&=m_0e_0(\ddot{x}+g)\sin\varphi+C_{1m}i_i\\ L_i\frac{di_i}{dt}+(R+Re+Ri)i_i&=u_b-c_{1m}\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{1}$$

Pentru studiul regimurilor staţionare în apropierea rezonanţei se consideră că parametrii sistemului sînt astfel încît să se poată introduce parametrul mic ε în primele ecuaţii ale sistemului (1). Notînd cu Ω viteza unghiulară instantanee dezacordul $\Omega-\omega_n$ este mic pentru regimuri staţionare situate în apropierea domeniului de rezonanţă. Regimurile staţionare periodice se studiază cu ajutorul unor mărimi adimensionale. Folosind notaţiile:

$$m=m_1+m_0,\ \omega_n^2=\frac{k}{m},\ y=\frac{x}{e_0},\ \Omega=\frac{d\varphi}{d\tau},\ y'=\frac{dy}{d\tau},\ \tau=\omega_n\tau$$

$$\varepsilon\bar{D}=\frac{c}{m\omega_n};\ \varepsilon\bar{\mu}=\frac{m_0}{m},\ \varepsilon\bar{\lambda}=\frac{m_0e_0^2}{I},\ \varepsilon\bar{\delta}=\frac{m_0e_0g}{I\omega_n^2},\ \varepsilon D_1=\frac{c_1}{L\omega_n};\tag{2}$$

$$\varepsilon\bar{\alpha}=\frac{C_{1m}I_m}{J\omega_n^2},\ i=\frac{i_i}{I_m},\ \alpha_1=\frac{R+Re+Ri}{L_i\omega_n},\ \alpha_2=\frac{u_b}{I_mL_i'\omega_n},\ \alpha_3=\frac{C_2}{I_mL_i}$$

Sistemul (1) devine

$$\begin{aligned} y''+\Omega^2y&=\varepsilon\bar{\mu}(\Omega'\sin\varphi+\Omega^2\cos\varphi)-2\varepsilon\bar{D}y'+\varepsilon(\Omega^2-1)\ y\\ \varphi''&=\varepsilon(\bar{\nu}y''+\bar{\delta})\sin\varphi+\varepsilon\bar{\alpha}i-\varepsilon\bar{D}_1\Omega\\ i'+\alpha_1i&=\alpha_2-\alpha_3\Omega \end{aligned} \tag{3}$$

Pentru sistemul autonom (3) se determină soluţiile staţionare periodice, cu perioada minimă $2\pi/\omega_0$. Aceste soluţii se obţin aproximativ considerînd dezvoltările :

$$\begin{aligned} y&=y_0(\tau)+\varepsilon y_1(\tau)+0(\varepsilon^2)\\ \Omega&=\omega_0+\varepsilon\Omega_1(\tau)+0(\varepsilon^2)\\ i&=i_0+\varepsilon i_i(\tau)+0(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{4}$$

Limitînd procesul de aproximare la primele două aproximaţii, se găseşte sistemul

$$y_0''+\omega_0^2y_0=0,\quad \varphi_0''=0,\quad i_0'+\alpha_1i_0=\alpha_1-\alpha_3\omega_0 \tag{5}$$

de unde pentru aproximaţia de ordinul zero rezultă:

$$y_0=A(\omega_0)\sin\omega_0\tau+B(\omega_0)\cos\omega_0\tau,\quad \varphi_0=\omega_0\tau,\quad i_0=\frac{\alpha_2-\alpha_3\omega_0}{\alpha_1} \tag{6}$$

Rămîn nedetermin ate constantele A, B și ω_0. Pentru determinarea lor se consideră și aproximația de ordinul întîi. Se obține sistemul

$$y_1'' + \omega_0^2 y_1 = \bar{\mu}\omega_0^2 \cos\omega_0\tau - 2\bar{D}\omega_0(A\cos\omega_0\tau - B\sin\omega_0\tau) = (\omega_0^2 - 1)(A\sin\omega_0\tau + B\cos\omega_0\tau) - 2\omega_0\Omega_1(A\sin\omega_0\tau + B\cos\omega_0\tau) \quad (7)$$

$$\Omega_1' = -\bar{\nu}\omega_0^2(A\sin\omega_0\tau + B\cos\omega_0\tau)\sin\omega_0\tau + \bar{\rho}\sin\omega_0\tau + \bar{\alpha}i_0 - \bar{D}_1\omega_0$$

$$i_1' + \alpha_1 i = -- - \alpha_3\Omega_1$$

Pentru ca regimurile staționare să fie periodice cu perioada $2\pi/\omega_0$, este necesar ca a doua din ecuațiile sistemului (7) să nu conțină termeni liberi. Impunînd această condiție se obține ecuația algebrică

$$\frac{\nu\omega_0^2}{2} A(\omega_0) = \frac{\alpha\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha\alpha_3 + \alpha_1 D_1}{\alpha_1}\omega_0 \quad (8)$$

cu care se determină valorile vitezei unghiulare medii ω_0 pentru care au loc regimuri staționare periodice.

În cazul cînd condiția (8) este satisfăcută viteza unghiulară Ω se exprimă aproximativ prin

$$\Omega = \omega_0 + \frac{\nu\omega_0}{4} A\sin 2\omega_0\tau + \frac{\nu\omega_0}{4} B\cos 2\omega_0\tau - \frac{\delta}{\omega_0}\cos\omega_0\tau \quad (9)$$

Ultima din ecuațiile sistemului (7) admite soluția particulară

$$i_1 = E_1\sin\omega_0\tau + E_2\cos\omega_0\tau + F_1\sin 2\omega_0\tau + F_2\cos 2\omega_0\tau \quad (10)$$

unde

$$E_1 = \frac{\alpha_3\delta}{\alpha_1^2 + \omega_0^2}, \qquad E_2 = \frac{\alpha_1\alpha_3\delta}{\omega_0(\alpha_1^2 + \omega_0^2)},$$

$$F_1 = \frac{-\alpha_3\bar{\nu}\omega_0(\alpha_1 A + 2\omega_0 B)}{4(\alpha_1^2 + 4\omega_0^2)}, \qquad F_2 \frac{-\alpha_3\bar{\nu}\omega_0(\alpha_1 B - 2\omega_0 B)}{4(\alpha_1^2 + 4\omega_0^2)} \quad (11)$$

Pentru periodicitatea soluțiilor periodice trebuie impusă și condiția ca prima din ecuațiile sistemului (7) să nu conțină termeni seculari. Această condiție conduce la sistemul

$$2\bar{D}\omega_1 B + (\omega - 1)A = 0$$

$$-2\bar{D}\omega_0 A + (\omega_0^2 - 1)B + \mu\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2\bar{\nu}}{4}(A^2 + B^2) = 0 \quad (12)$$

de unde se determină constantele de integrare A și B.

Rezolvînd sistemul (12) se găsește

$$A = -\frac{4D}{\nu\omega_0}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{\mu\omega_0^4}{R}}\right], \qquad R = (1 - \omega_0^2)^2 + 4D^2\omega_0$$

$$B = -\frac{2(1 - \omega_0^2)}{\nu\omega_0^2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{\mu\omega_0^4}{R}}\right] \quad (13)$$

Condiţiile (12) fiind satisfăcute, pentru prima din ecuaţiile sistemului (7) se găseşte soluţia particulară

$$y_1 = -\frac{\bar{\delta}B}{\omega_0^2} - \frac{\bar{\delta}A}{3\omega_0^2}\sin 2\omega_0\tau + \frac{\bar{\delta}B}{3\omega_0^2}\cos 2\omega_0\tau + \frac{\bar{\nu}}{16}AB\sin 3\omega_0\tau + \\ + \frac{\bar{\nu}}{16}(B^2 - A^2)\cos\varepsilon\omega_0\tau \qquad (14)$$

Ţinînd seama de (13) ecuaţia (8) devine

$$2D\omega_0\left(\sqrt{1+\frac{\mu\omega_0^4}{R}}-1\right) = \frac{\alpha\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha\alpha_3+\alpha_1 D_1}{\alpha_1}\omega_0 \qquad (15)$$

de unde se determină ω_0. Ecuaţia (15) s-a obţinut considerînd în faţa radicalului semnul minus. Semnul minus a fost ales ţinînd seama că în mărimi adimensionale, momentul transmis de motorul electric vibratorului se exprimă prin

$$Q(\omega_0) = \frac{\alpha\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha\alpha_3+\alpha_1 D_2}{\alpha_1}\omega_0 \qquad (16)$$

iar momentul rezistent prin

$$\Gamma(\omega_0) = 2D\omega_0\left(\sqrt{1+\frac{\mu\omega_0^4}{R}}-1\right) \qquad (17)$$

Momentul (16) trebuie să fie pozitiv şi deci pentru ca curba $\Gamma(\omega_0)$ să se intersecteze cu dreapta $Q(\omega_0)$ s-a ales în faţa radicalului semnul minus. Numai rădăcinile reale pozitive ale ecuaţiei (15) convin pentru regimurile staţionare periodice.

În fig. 3 s-a trasat o curbă $\Gamma(\omega_0)$ pentru $D=0{,}1$ şi $\mu=0{,}1$. Din intersecţia ei cu dreapta $Q(\omega_0)$ rezultă că sînt posibile cel mult trei rădăcini reale, pozitive şi distincte ale ecuaţiei (15), notate cu $\omega_{01}<\omega_{02}<\omega_{03}$. Primele două valori sînt situate în apropierea domeniului de rezonanţă iar ω_{03} este superioară

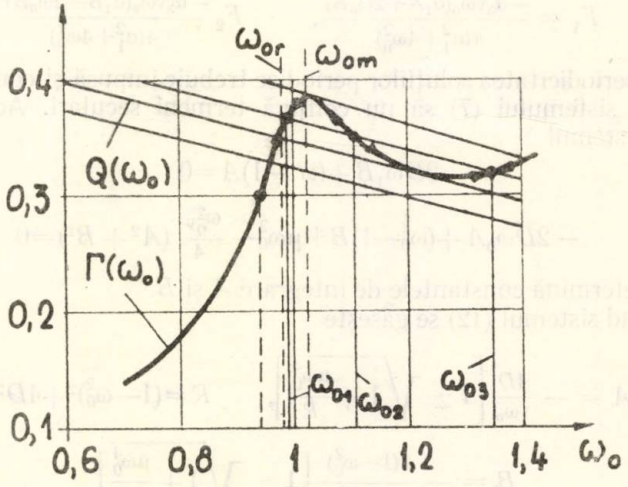


Fig. 3.

domeniului de rezistenţă. Pentru valorile considerate amplitudinea maximă a sistemului amortizat se obţine pentru $\omega_{0r}=0{,}98$. Valoarea maximă a momentului $\Gamma(\omega_0)$ în acest caz se obţine pentru $\omega_{0r}=1{,}03$. Admiţînd domeniul de rezonanţă $(\omega_{0r}-\delta,\ \omega_0+\delta)$, se consideră regimuri staţionare apropiate de rezonanţă acele regimuri pentru care $\omega_{01}\in(\omega_0-\delta,\ \omega_{0r}+\delta)$. Pentru valorile din fig. 3, se poate alege

$$\delta=\omega_{0m}-\omega_{0r} \tag{18}$$

astfel ca valoarea maximă a lui $\Gamma(\omega_0)$ să fie situate la limita superioară a domeniului de rezonanţă.

S-a considerat numai valoarea ω_{01} pentru caracterizarea regimurilor staţionare apropiate de rezonanţă, deoarece pentru această valoare se obţine un regim staţionar stabil iar pentu ω_{02} un regim staţionar instabil.

Într-adevăr, dacă se consideră o perturbare mică pozitivă $\Delta\omega_0$ se observă că pentru ω_{01} are loc inegalitatea

$$\frac{d\Gamma}{d\omega_0}>-\frac{\alpha a_3+\alpha_1 D_1}{\alpha_1} \tag{19}$$

rezultă că

$$\begin{aligned}\Gamma(\omega_{01}+\Delta\omega_0)&>Q(\omega_{01}+\Delta\omega_0)\\ \Gamma(\omega_{01}-\Delta\omega_0)&<(\omega_{01}-\Delta\omega_0)\end{aligned} \tag{20}$$

Deci, dacă valoarea ω_0 a fost perturbată cu $\pm\Delta\omega_0$, după perturbare sistemul lăsat liber tinde să funcţioneze în regimul staţionar caracterizat de ω_{01} avut înainte de perturbare. Adică regimul staţionar periodic corespunzător valorii ω_{01}, este stabil. Studiul regimurilor staţionare periodice, se poate folosi la proiectarea vibratoarelor inerţiale acţionate cu motoare electrice, în cazul cînd vibratorul urmează să funcţioneze în apropierea rezonanţei. Alegînd domeniul de rezonanţă, parametrii sistemului se aleg astfel încît curba $\Gamma(\omega_0)$ să se intersecteze cu dreapta $Q(\omega_0)$ într-un punct de abscisă ω_{01}, situat în interiorul domeniului de rezonanţă.

BIBLIOGRAFIE

1. Chetayevn N.: *The Stability of Notion*, s. 51, Oxford, London, New York, Paris, 1961.
2. Christh H.: *An*-und Auslauf eines gedämpften unwuchterregten Schwingers. VDI-Berichte Nr. 135 1969.
3. Dimentbergm F. Frolov K. V.: Effect Sommerfeld v sistem so sluciaino iz meniaiusceisia sobstvennoi ciastotoi. Dok A. N. SSSR 1966 171 Nr. 6
4. Goloskokov E. G. Filipov A. P.: Nestaţionarnîe kolebaniia mehaniceskih Sistem. „Naukova Dumka" Kiev 1966.
5. Grosanu I.: Contribuţii privind studiul mişcărilor staţionare şi nestaţionare ale sistemelor mecanise excitate inerţial, acţionate cu motoare electrice. Rezumatul tezei de doctorat I. P. Timişoara 1970.
6. Karaminskin V. V.: Zamecianie o haraktere rezonansnogo divijeniia mehaniceskoi sistemî s teutobrejnîm vibratorom. Vestnik Moskvakogo universiteta Nr. 1 1967

7. Kononenko V. O.: Necatorîe sistemî s ogranicennîm vozbujdeniem. Izd-vo „Nauka" Moskva 1964.
8. Livovic A.: Mehaniceskie kolebaniia vozbujdaemîe elektrodivgatelem. Vesnik Leningradskogo Universitetă Nr. 7 Vîp 2, 1968.
9. Morrison J. A.: Asymptotic Analysis of a Nonlinear Autonomous Vibratory System. The Bell Sistem Technical Journal, January 1970.
10. Panovko Ia. G., Gubavova I. I.: Ustoicivosti i kolebaniia upriginh Sistem, Izd-vo „Nauka" Moskva 1967.
11. Pustil.: Perehod cerez oblast rezonansa i kolebatelnîh mehaniceskih sistem s ucetom vlianiia vibratora, Trudî mejdunarodnogo simpoziuma po nelineinîm kolebania. T. 3 Kiev, Izd-vo AN USSR 1963.
12. Senator M.: Limit Cycless and Stability of a Nonlinear Two-Degree of Freedomm Autonomous Vibratory System, Journal of Enginering for Industry, Trans. ASME 91, Serie B, No 4 (November 1969).
13 Silas Gh., Groşanu I.: Studiul regumirilor staţionare ale unui vibrator acţionat cu un motor electric de curent continu. A II-a Conferinţă de mecanică tehnică, Bucureşti, 29-31oct. 1970.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСНОЙ ОБЛАСТИ ИНЕРЦИАЛЬНОГО ВИБРАТОРА

(РЕЗЮМЕ)

В работе рассматриваются стационарные режимы инерциального вибратора приведенного электродвигателем постоянного тока.

Принимая случай стационарных режимов близких к резонансной области вибратора.

При помощи метода малого параметра устанавливаются приближенно стационарные режимы и по определенным энергетическим соображением устанавливаются условия устойчивости этих режимов.

THE STUDY OF STEADY STATES NEAR BY THE RESONANCE DOMAIN OF AN INERTIAL VIBRATOR

(SUMMARY)

The paper deals with the study of periodical steady states of an inertial vibradriven by a d.c. electric motor. There was considered the case of steady states near by the resonance domani of the vibrator. The steady states are determined approximately with the help of perturbation method. The stability conditions of these steady states are established with the help of energetical considerations.

ASUPRA DINAMICII PUNCTULUI MATERIAL CU CARACTERISTICI DISCONTINUU VARIABILE

I. N. CONSTANTINESCU A. V. DARABONT,

1. GENERALITĂȚI

Teoria distribuțiilor s-a dovedit extrem de eficace la studiul sistemelor cu caracteristici discontinuu variabile, adică a sistemelor de masă continuu și discontinuu variabilă și acționate de forțe excitatoare cu caracteristici discontinuu variabile.

În acest sens pot fi citate ca exemple lucrările [1]—[3].

În prezenta lucrare se stabilesc ecuațiile de mișcare ale punctului material cu caracteristici discontinuu variabile, adică cu masa variind discontinuu prin captarea sau emisia unor particole de masă finită și supusă concomitent acțiunii unor forțe discontinuu variabile.

Pentru stabilirea ecuațiilor micșării se utilizează o proprietate a distribuțiilor referitoare la o funcție a cărei derivate prezintă în anumite puncte discontinuități de speța I.

Fie o distribuție T dată de o funcție x, care are o derivată continuă x' peste tot, cu excepția punctului t_0.

Considerăm că în punctul t_0 avem o discontinuitate de speța I, adică există limita la dreapta și limita la stînga a funcției în punctul t_0.

$$x(t_{0+})=\lim_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}} x(t)\,; \qquad x(t_{0-})=\lim_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} x(t)$$

Derivata distribuției T va fi :

$$T'\varphi=\int_{-\infty}^{t_0}\varphi'(t)\,x(t)dt+\int_{t_0}^{\infty}\varphi'(t)\,x(t)dt=\varphi(t)\,x(t)\Big|_{-\infty}^{t_0}-$$

$$-\int_{-\infty}^{t_0}\varphi(t)\,x'(t)dt+\varphi(t)\,x(t)\Big|_{t_0}^{\infty}-\int_{t_0}^{\infty}\varphi(t)\,x'(t)dt=\varphi(t_0)\,[x(t_{0-})-x(t_{0+})]-$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,x'(t)dt$$

unde φ este o funcție cu valori complexe.

Notînd cu $\hat{T}'$ distribuția dată de funcția x', cu $S(t_0)$ saltul funcției x în punctul t_0, adică

$$S(t_0)=X(t_{0+})-X(t_{0-}),$$

cu $\delta(t)$ distribuția lui Dirac, din relația de mai sus obținem.

$$T'=\hat{T}'+S(t_0)\delta(t_0) \tag{1}$$

În cazul general cînd funcția x are derivata continuă peste tot cu excepția unei mulțimi de puncte izolate $t_i(i=1,2,\ldots,k)$, unde funcția are salturile $S(t_i)$ relația (1) devine:

$$T'=\hat{T}'+\sum_{i=1}^{k} S(t_i)\ \delta(t_i) \tag{2}$$

Fie acum un punct material M a cărui masă variază discontinuu după una din funcțiile reprezentate în fig. 1

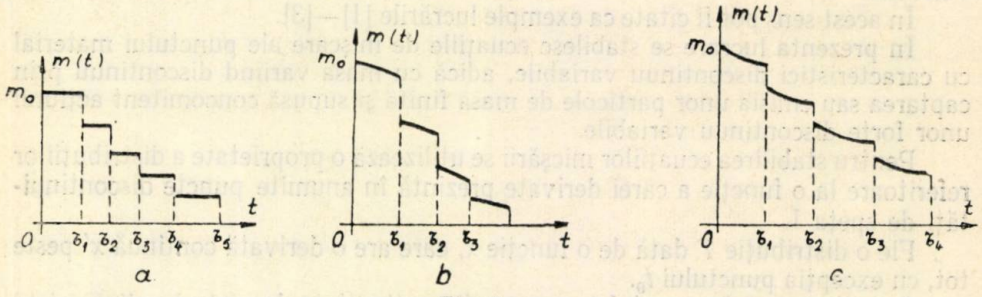


Fig. 1.

Masa variabilă $m(t)$ emite la momentele $t=\tau_i(i=1, 2, \ldots, n)$, părți de masă $\mu_i(\tau_i)<m_0$ unde m_0 este masa la momentul inițial $t=0$.

Notînd cu $H(t-\tau_i)$ funcția Heaviside, variația masei pentru cele trei cazuri prezentate se va scrie sub forma:

$$m=m_0-\sum_{i=1}^{k}\mu_i(\tau_i)\ H(t-\tau_i); \tag{3}$$

$$m=m_0(1-\alpha t)-\sum_{i=1}^{k}\mu_i(\tau_i)\ H(t-\tau_i); \tag{4}$$

$$m=m_0e^{-\alpha t}-\sum_{i=1}^{k}\mu_i(\tau_i)\ H(t-\tau_i) \tag{5}$$

În mod analog se poate proceda în cazul cînd masa punctului material variază după alte funcții cu discontinuități.

Derivînd relaţiile (3), (4) şi (5) în sensul distribuţiilor şi avînd în vedere că derivata distribuţiei lui Heaviside este distribuţia lui Dirac, adică :

$$<\varphi, H'> = <\varphi, \delta> ;$$

obţinem :

$$\frac{dm}{dt} = -\sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\ \delta(t-\tau_i) \tag{6}$$

$$\frac{dm}{dt} = -m_0\alpha - \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\ \delta(t-\tau_i) \tag{7}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m_0 e^{-\alpha t} - \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\ \delta(t-\tau_i) \tag{8}$$

Asupra punctului material, în afară de rezultanta forţelor obişnuite $\bar{R}$ mai acţionează şi o forţă discontinuu variabilă $\bar{F}_v$ care se poate exprima cu ajutorul funcţiei lui Heaviside.

2. ECUAŢIA FUNDAMENTALĂ GENERALIZATĂ A MIŞCĂRII PUNCTULUI MATERIAL CU CARACTERISTICI DISCONTINUU VARIABILE.

Să admitem că în timpul mişcării punctului material, masa acestuia variază după o funcţie în trepte, se deplasează cu viteza absolută $\bar{v}$, captează şi emite cîte o particulă de masă dm_1 respectiv dm_2, cu vitezele absolute u_1 respectiv u_2, procesele de captare şi emisie fiind independente între ele.

Prin analogie cu ecuaţia lui Meşcerski, ecuaţia fundamentală generalizată a mişcării punctului material cu caracteristici discontinuu variabile este de forma :

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{R} + \bar{F}_v + \frac{dm_1}{dt}(\bar{u}_1 - \bar{v}) - \frac{dm_2}{dt}(\bar{u}_2 - \bar{v}) \tag{9}$$

unde $\bar{R}$ este rezultanta forţelor exterioare şi de legătură obişnuite $\bar{F}_v$ — forţa discontinuu variabilă.

Calculînd derivatele din relaţia (9) în sensul distribuţiilor, obţinem :

$$\left[m_0 + \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\ H(t-\tau_i) - \sum_{j=1}^{k} \mu_j(\tau_j)\ H(t-\tau_j)\right]\frac{d\bar{v}}{dt} =$$

$$= \bar{R} + \bar{F}_v + \sum_{i=1}^{k} (\bar{u}_i - \bar{v})\ \mu_i(\tau_i)\ \delta(t-\tau_i) - \sum_{j=1}^{k} (\bar{u}_j - \bar{v})\mu_j(\tau_j)\ \delta(t-\tau_j) \tag{10}$$

Cazuri particulare :

a) $dm = dm_1$; $dm_2 = 0$ şi $u_i \cong 0$

$$\left[m_0 + \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\ H(t-\tau_i)\right]\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{R} + \bar{F}_v - \bar{v}\sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\ \delta(t-\tau_i)$$

b) $dm=-dm_2$; $dm_1=0$ și $\bar{u}_j-\bar{v}=\bar{V}_{ij}=0$,

$$\left[m_0-\sum_{j=1}^{n}\mu_i(\tau_j)\,H(t-\tau_j)\right]\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{R}+\bar{F}_v \tag{12}$$

Exemple

1. Fie ecuația $m\ddot{x}=-mg-\frac{dm}{dt}v_r$ unde

$$m=m_0-\sum_{j=1}^{n}\mu_j H(t-\tau_j)\,;\ \frac{dm}{dt}=-\sum_{j=1}^{n}\mu_j\delta(t-\tau_j)$$

Notînd $\mu=km_0$ și considerînd $\dot{x}(0)=x(0)=0$, obținem ecuația operațională de forma:

$$p^2X(1-ke^{-\tau p})=-\frac{g}{p}+\frac{kge^{-\tau p}}{p}+kv_re^{-\tau p}$$

Explicitînd pe $X(p)$ și calculînd transformata inversă avem:

$$x(t)=-g\frac{t^2}{2}+kv_r[(t-\tau)\,H(t-\tau)+k(t-2\tau)\,H(t-2\tau)+\dots]$$

2. Aceeași ecuație ca și la exemplul 1, însă

$$m=m_0[1-kH(t-\tau)]\,e^{-\alpha t}\text{ și }\frac{dm}{dt}=-\alpha m_0[1-kH(t-\tau)]e^{-\alpha t}-km_0\delta(t-\tau)e^{-\alpha t}$$

Considerînd $\dot{x}(0)=x(0)=0$ obținem ecuația operațională de forma:

$$p^2Xm_0(1-ke^{-\tau p})+\frac{(g-v_r\alpha)}{p}m_0(1-ke^{-\alpha p})=km_0v_re^{-\alpha p}$$

Explicitînd pe $X(p)$ și calculînd transformata inversă avem:

$$x(t)=\frac{(v_r\alpha-g)t^2}{2}+kv_r(t-\tau)\,H(t-\tau)$$

3, TEOREMA IMPULSULUI

Impulsul punctului material de masă discontinuu variabilă este

$$\bar{H}=\left[m_0+\sum_{i=1}^{k}\mu_i(\tau_i)\,H(t-\tau_i)-\sum_{j=1}^{n}\mu_j(\tau_j)\,H(t-\tau_j)\right]\bar{v} \tag{13}$$

Ecuația fundamentală generalizată a mișcării punctului material (10) se mai poate scrie și sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left[m_0+\sum_{i=1}^{k}\mu_i(\tau_i)\,H(t-\tau_i)-\sum_{j=1}^{n}\mu_j(\tau_j)\,H(t-\tau_j)\right]\bar{v}=$$

$$= \overline{R} + \overline{F}_v + \sum_{i=1}^{k} \overline{u}_i \mu_i(\tau_i)\, \delta(t-\tau_i) - \sum_{j=1}^{n} \overline{u}_j \mu_j(\tau_j)\, \delta(t-\tau_j) \tag{14}$$

Ţinînd seama de (13) avem :

$$\frac{d\overline{H}}{dt} = \overline{R} + \overline{F}_v + \sum_{i=1}^{k} \overline{u}_i \mu_i(\tau_i)\, \delta(t-\tau_i) - \sum_{j=1}^{n} \overline{u}_j \mu_j(\tau_j)\, \delta(t-\tau_j) \tag{15}$$

Notînd cu

$$\overline{F}_{ui} = \sum_{i=1}^{k} \overline{u}_i \mu_i(\tau_i) \overline{u}_j \delta(t-\tau_i) \text{ şi } \overline{F}_{uj} = \sum_{j=1}^{n} \overline{u}_j \mu_j(\tau_j)\, \delta(t-\tau_j),$$

forţele reactive corespunzătoare, relaţia (15) devine :

$$\frac{d\overline{H}}{dt} = \overline{R} + \overline{F}_v + \overline{F}_{ui} - \overline{F}_{uj} \tag{16}$$

adică : derivata în sensul distribuţiilor în raport cu timpul a impulsului, este egală cu suma vectorială a forţelor exterioare obişnite a forţelor discontinuu variabile şi a forţelor reactive condiţionate de mişcarea absolută.

4. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC

În cazul punctului material de masă discontinuu variabilă, momentul cinetic $\overline{K}$ în raport cu un pol dat, se defineşte prin relaţia :

$$\overline{K} = \overline{r} \times \left[m_0 + \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\, H(t-\tau_i - \sum_{j=1}^{n} \mu_j(\tau_j)\, H(t-\tau_j) \right] \overline{v} \tag{17}$$

Pentru stabilirea ecuaţiei care exprimă teorema momentului cinetic, multiplicăm vectorial la stînga cu r relaţia (14). Ţinînd seama de relaţia (17) şi notînd

$$\overline{M}(\overline{R}) = \overline{r} \times \overline{R}\,; \quad \overline{M}(\overline{F}_v) = \overline{r} \times \overline{F}_v\,;$$

$$\overline{M}(\overline{F}_{ui}) = \overline{r} \times \sum_{i=1}^{k} \overline{u}_i \mu_i(\tau_i) \delta(t-\tau_i)$$

$$\overline{M}(\overline{F}_{uj}) = \overline{r} \times \sum_{j=1}^{n} \overline{u}_j \mu_j(\tau_j)\, \delta(t-\tau_j).$$

obţinem :

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \overline{M}(\overline{R}) + \overline{M}(\overline{F}_v) + \overline{M}(\overline{F}_{ui}) - \overline{M}(\overline{F}_{uj}). \tag{18}$$

dică : derivata în sensul distribuţiei în raport cu timpul a momentului cinetic n raport cu un pol oarecare, este egală cu suma vectorială a momentelor faţă de acelaşi pol ale forţelor exterioare obişnuite, discontinuu variabile şi reactive.

5. TEOREMA ENERGIEI CINETICE

Energia cinetică T a punctului material, se determină cu relația :

$$T = \frac{\bar{v}^2}{2}\left[m_0 + \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\ H(t-\tau_i) - \sum_{j=1}^{n} \mu_j(\tau_j) H(t-\tau_j)\right] \tag{19}$$

Derivînd relația (19) în sensul distribuțiilor în raport cu timpul și ținînd seama de expresia (10) obținem

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\bar{v}^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\ \delta(t-\tau_i) - \sum_{j=1}^{n} \mu_j(\tau_j)\ \delta(t-\tau_j)\right] + \bar{v}\bar{R} + \bar{v}\bar{F}_v +$$

$$+ \bar{v}\sum_{i=1}^{k} (\bar{u}_i - \bar{v})\ \mu_i(\tau_i)\delta(t-\tau_i) - \bar{v}\sum_{j=1}^{n} (\bar{u}_j - \bar{v})\ \mu_j(\tau_j)\ \delta(t-\tau_j)$$

Grupînd termenii și notînd

$$\bar{v}\bar{R} = P_e\ ;\quad \bar{v}\bar{F}_v = P_v\ ;\quad \bar{v}\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{u}_i - \frac{\bar{v}}{2}\right)\mu_i(\tau_i)\ \delta(t-\tau_i) = P_{ui}\ ;$$

$$\bar{v}\sum_{j=1}^{n}\left(\bar{u}_j - \frac{\bar{v}}{2}\right)\mu_j(\tau_j)\ \delta(t-\tau_j) = P_{uj}$$

unde P_e, P_v, P_{ui} și P_{uj} reprezintă puterea dezvoltată de forțele exterioare obișnuite, de forța discontinuu variabilă respectiv de cele două categorii de forțe reactive.

Deci teore,a energiei cinetice se poate scrie sub forma :

$$\frac{dT}{dt} = P_e + P_v + P_{ui} + P_{uj} \tag{20}$$

adică : derivata în sensul distribuțiilor în raport cu timpul a energiei cinetice este egală cu suma puterii forțelor exterioare obișnuite, discontinuu variabile și reactive.

6. MIȘCAREA PUNCTULUI MATERIAL CU CARACTERISTICI DISCONTINUU VARIABILE, SUPUS LA LEGĂTURI IDEALE.

Considerăm că punctul material se deplasează pe o suprafață lucie

$$\varphi(x, y, z, t) = 0 \tag{21}$$

În acest caz ecuația (9) devine :

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{R} + \bar{F}_v + \frac{dm_1}{dt}(\bar{u}_1 - \bar{v}) - \frac{dm_2}{dt}(\bar{u}_2 - \bar{v}) + \lambda\ \text{grad}\ \varphi,$$

Notînd cu α_1, β_1, γ_1 și α_2, β_2, γ_2 proiecțiile pe axele unui triedru cartezian dereferință a vitezelor u_1 respectiv u_2, obținem :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X + X_v + \frac{dm_1}{dt}(\alpha_1 - \dot{x}) - \frac{dm_2}{dt}(\alpha_2 - \dot{x}) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \\ m\ddot{y} = Y + Y_v + \frac{dm_1}{dt}(\beta_1 - \dot{y}) - \frac{dm_2}{dt}(\beta_2 - \dot{y}) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \\ m\ddot{z} = Z + Z_v + \frac{dm_1}{dt}(\gamma_1 - \dot{z}) - \frac{dm_2}{dt}(\gamma_2 - \dot{z}) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases} \tag{23}$$

Din ecuația suprafeței (21) rezultă:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\ddot{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\ddot{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\ddot{z} = -\left(\dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \dot{y}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \dot{z}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \tag{25}$$

Înlocuind în (25) $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ și $\ddot{z}$ din (23) și utilizînd (24) obținem:

$$\lambda = \mu + \frac{dm_1}{dt}\Phi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) - \frac{dm_2}{dt}\Phi(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \tag{26}$$

unde am notat:

$$\mu = -\frac{1}{(\Delta\varphi)^2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(X + X_v) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(Y + Y_v) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(Z - Z_v) + \right.$$
$$\left. + m\left(\dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \dot{y}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \dot{z}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right. \tag{27}$$

$$\Delta\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} \tag{28}$$

$$\Phi(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = -\frac{1}{(\Delta\varphi)^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\alpha_i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\beta_i + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\gamma_i + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) (i = 1, 2) \tag{29}$$

E x e m p l u. Să considerăm cazul unui punct material care se deplasează pe o suprafață lucie

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Alegînd un sistem de axe cu originea în centrul sferei și axa $0z$ ascendentă și considerînd că masa punctului variază în trepte (fig. 1 a) numai prin desprindere, obținem:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x; \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y; \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2z; \qquad \Delta\varphi = 2R;$$

$$\Phi(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = -\frac{1}{2R^2}(x\alpha_2 + y\beta_2 + z\gamma_2);$$

$$X = Y = 0; \quad Z = -mg = -g\left[m_0 - \sum_{i=1}^{k}\mu_i(\tau_i)\, H(t - \tau_i)\right];$$

$$\mu = \frac{zg}{2R^2}\left[m_0 - \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\, H(t-\tau_i)\right];$$

$$\lambda = \frac{zg}{2R^2}\left[m_0 - \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\, H(t-\tau_i)\right] - \frac{1}{2R^2}(x\alpha_2 + y\beta_2 + z\gamma_2) \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\, \delta(t-\tau_i)$$

Ecuaţiile mişcării vor fi de forma :

$$\left(\ddot{x} - \frac{xzg}{R^2}\right)\left[m_0 - \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\, H(t-\tau_i)\right] - \left[\alpha_2 - \dot{x} - \frac{x}{R^2}(x\alpha_2 + y\beta + z\gamma_2)\right] \cdot \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i) = 0$$

$$\left(\ddot{y} - \frac{yzg}{R^2}\right)\left[m_0 - \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\, H(t-\tau_i)\right] - \left[\beta_2 - \dot{y} - \frac{y}{R^2}(x\alpha_2 + y\beta_2 + z\gamma_2)\right] \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\, \delta(t-\tau_i) = 0$$

$$\left(\ddot{z} - \frac{z^2 g}{R^2}\right)\left[m_0 - \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\, H(t-\tau_i)\right] - \left[\gamma_2 - \dot{z} - \frac{z}{R^2}(x\alpha_2 + y\beta_2 + z\gamma_2)\right] \cdot \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\tau_i)\, \delta(t-\tau_i) = 0$$

BIBLIOGRAFIE

1. Kecs W. Teodorescu P. P. — *Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în mecanică*, Bucureşti Ed. Academiei, 1970.
2. Tocaci E. — Aspecte ale utilizării teoriei distribuţiilor în mecanică, St, cerc. mec. apl. 29, 1, 27—45 (1970)
3. Nowacki W. — *Dinamica sistemelor elastice* (trad. dim limba poloneză,) Bucureşti, Ed. tehnică, 1969.

В СВЯЗИ С ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ С ПРЕРЫВИСТЫМИ ИЗМЕНЯЮЩИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

(РЕЗЮМЕ)

В работе устанавливаются уравнения движения материальной точки с беспрерывно переменными характеристиками, то есть с массой беспрерывно переменной путём улавливания или испускания частиц массы конечной и подвергаемой одновременно действию беспрер'вно переменных сил.

Для установления уравнений движения применяется свойство распределений, относящееся к функции, производная которой представляет в отдельных точках беспрерывности типа 1-ого.

Применяемый математический инструмент была теория распределений.

В конце даётся численный пример.

SUR LA DYNAMICUE DU POINT MATERIAL AUX CARACTERISTIQUES DISCONTINUMENT VARIABLES

(RÉSUMÉ)

Dans l'ouvrage on établit les équations de mouvement du point matérial aux caractéristiques discontinument variables, ce qui revient à dire, à masse à variation discontinue par le captage on l'emission de certaines particules de masse finie et soumise simultanément à l'acţion de certaines forces discontinument variables.

Pour établir les équations du mouvement on utilise une propriété des distributions concernant une fonction dont les dérivées présentent en certaines points des discontinuités de première espèce.

L'appareil mathématique utilisé est la théorie des distributions.

On donne aussi un exemple de calcul.

ASUPRA COMPUNERII ACCELERAȚIILOR DE ORDIN SUPERIOR ÎN MIȘCAREA RELATIVĂ.

Gh. SILAȘ, L. BRÎNDEU

Există muneroase cazuri cînd, în afară de elementele cinematice folosite obișnuit, mai este necesar să se considere și accelerațiile de ordin superior [1], [3].

În mod deosebit au fost studiate accelerațiile de ordinul doi pentru care s-au găsit o serie de proprietăți remarcabile. Astfel s-a determinat legea compunerii accelerațiilor de ordinul doi în mișcarea relativă și unele proprietăți ale accelerației Coriolis [4], [5].

Pe o cale operațională C. Burali-Forti [2] a determinat legea de compunere a accelerațiilor de ordin superior în mișcarea relativă, stabilind astfel și expresii pentru accelerațiile Coriolis de diferite ordine.

În continuare se va folosi o altă cale geometrică pentru determinarea legii de compunere a accelerațiilor în mișcarea relativă [6] care poate fi utilizată și în cazul accelerațiilor de ordin superior. Din studiul geometric al mișcării rezultă imediat legea de compunere a acceleraților de orice ordin și expresiile corespunzătoare accelerațiilor Coriolis.

1. ACCELERAȚII DE ORDIN SUPERIOR.

Prin derivarea în raport cu timpul a accelerației respectiv a vitezei se obțin accelerațiile de diferite ordine ale punctului în mișcare. Astfel accelerația de ordinul i este derivata în raport cu timpul de ordinul $i-1$ a accelerației punctului sau de ordinul i a vitezei. Dacă vectorul de poziție al punctului față de originea 0 este $\bar{r}$, legea mișcării va fi $\bar{r}=\bar{r}(t)$ și deci accelerația de ordinul i se va putea scrie

$$\bar{a}^{(i)} = \frac{d^{i+1}\bar{r}}{dt^{i+1}} = \bar{r}^{(i+1)}, \qquad (i=1, 2, \ldots) \tag{1}$$

Într-un interval finit de timp Δt punctul material se va presupune că se deplasează pe traiectoria (C) din poziția M de la momentul t în poziția M_1 ce corespunde momentului $t+\Delta t$. Folosind dezvoltarea în serie a vectorului $\bar{r}(t+\Delta t)$ după puerile lui Δt se găsește

$$\overline{MM_1}=\bar{r}(t+\Delta t)-\bar{r}(t)=\sum_{i=1}^{\infty} \bar{r}^{(i)} \frac{(\Delta t)}{i!} \tag{2}$$

sau

$$\overline{MM}_1=\bar{v}\Delta t+\sum_{i=1}^{\infty}\bar{a}^{(i)}\frac{(\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!}$$

După cum se constată, dacă Δt este suficient de mic, vectorul deplasare $\overline{MM}_1$ este de asemenea mic fiind o sumă de vectori mici de diferite ordine de mărime

2. DISTRIBUȚIA DE ACCELERAȚII ÎN CORPUL RIGID.

Derivatele în raport cu timpul ale vectorului de poziție $\bar{\rho}=\overline{OM}$ ale punctului M din corpul rigid cu originea O, luată în corp, se vor determina folosind o metodă operațională [2]. Dacă se notează prin $\bar{\omega}$ viteza unghiulară de rotație a corpului, atunci pentru derivata $\dot{\bar{\rho}}$ se obține

$$\dot{\bar{\rho}}=\bar{\omega}\times\bar{\rho} \tag{4}$$

Derivatele de ordin superior se pot găsi din relațiile

$$\frac{d^{i+1}\bar{\rho}}{dt^{i+1}}=\bar{\rho}^{(i+1)}=(\bar{\omega}\times\bar{\rho})^{(i)} \tag{5}$$

în care se face pe rînd $i=1,2,...$ și se înlocuiesc succesiv derivatele calculate.

Este ușor de verificat că derivata (5) se mai poate prezenta cu ajutorul operatorilor $\beta_i(i=0, 1, 2, ...)$ sub forma

$$\bar{\rho}^{(i+1)}=\beta_{i+1}\bar{\rho} \tag{6}$$

unde

$$\beta_{i+1}=\dot{\beta}_i+\beta_i\beta_1, \qquad \beta_0=1, \qquad \beta_1=\bar{\omega}\times. \tag{7}$$

Acesti operatori sînt liniari și se exprimă prin vectorul $\bar{\omega}$ și derivatele lui. Pentru exemplificare se vor prezenta cîteva expresii mai simple, și anume;

$$\beta_0\bar{\rho}=\bar{\rho};\quad \beta_1\bar{\rho}=\bar{\omega}\times\bar{\rho};\quad \beta_2\bar{\rho}=\dot{\bar{\omega}}\times\bar{\rho}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{\rho});\quad \beta_3\bar{\rho}=\ddot{\bar{\omega}}\times\bar{\rho}+2\bar{\omega}\times(\dot{\bar{\omega}}\times\bar{\rho})+$$

$$+\bar{\omega}\times(\dot{\bar{\omega}}\times\bar{\rho})+\bar{\omega}\times[\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{\rho})];$$

Notînd prin $\bar{a}^{(i)}$ și $\bar{a}_0^{(i)}$ accelerațiile de ordinul i ale punctelor M și O dintr-un corp rigid, se poate scrie

$$\bar{a}^{(i)}=\bar{a}_0^{(i)}+\beta^{i+1}\bar{\rho} \tag{8}$$

Formula (8) poate fi folosită pentru studiul distribuției accelerațiilor de diferite ordine în corpul rigid. Pentru $i=0$ și $i=1$ se obțin formulele cunoscute ale distribuției de viteze și accelerații în cazul corpului rigid.

3. STUDIUL GEOMETRIC AL MIŞCĂRII RELATIVE.

Mişcarea relativă a punctului M se va studia geometric în intervalul finit de timp Δt, punînd în evidenţă traiectoriile absolută, relativă şi de transport a punctului. Punctul M în raport cu sistemul de referinţă mobil se mişcă pe traiectoria (C_r) numită traiectorie relativă şi în timpul Δt străbate pe această curbă arcul MM_1. În acelaşi interval de timp însă, traiectoria relativă (C_r) împreună cu punctul mobil de deplasează în raport cu un sistem de referinţă fix astfel încît devine (C_r'), M ajungînd în M' şi M_1 în M_1'.

Deplasarea traiectoriei din poziţia (C_r) în (C_r') este mişcarea de transport şi poate fi descompusă într-o mişcare de translaţie din (C_r) în (C_r'') urmată de o rotaţie în jurul unei axe trecînd prin M'. În felul acesta curbele (C_r) şi (C_r'') sînt curbe paralele identice deci $\overline{MM_1''}=\overline{MM_1}$. Dacă se opreşte mişcarea relativă a punctului M pe curba (C_r), el descrie în mişcarea de transport traiectoria de transport MM', de pe curba (C_t). La sfîrşitul intervalului de timp Δt, punctul M ajunge faţă de sistemul fix în poziţia M_1' şi deci traiectoria absolută (C_a) va trece prin M şi M_1'.

Din fig. 1 se observă că între vectorii $\overline{MM_1'}$ de pe traiectoria absolută (C_a), $\overline{MM'}$ de pe traiectoria de transport (C_t), $\overline{M'M_1''}=\overline{MM_1}$ de pe traiectoria relativă (C_r'') şi $\overline{M''M_1'}$ corespunzător rotaţiei în mişcarea de transport, există relaţia vectorială :

$$\overline{MM_1'}=\overline{MM'}+\overline{M'M_1''}+\overline{M_1''M_1'} \quad (9)$$

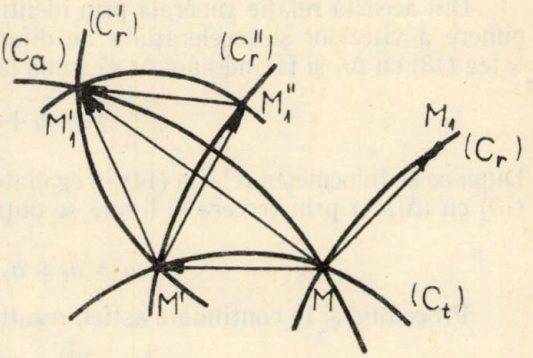


Fig. 1.

Toţi vectorii din relaţia (9) în afară de ultimul se pot scrie conform relaţiei (3) cu ajutorul vitezelor şi acceleraţiilor mişcării absolute, de transport sau relative, sub forma :

$$\overline{MM_1'}=\bar{v}_a\Delta t+\sum_{i=2}^{\infty}\bar{a}_a^{(i)}\frac{(\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!}$$

$$\overline{MM'}=\bar{v}_t\Delta t+\sum_{i=1}^{\infty}\bar{a}_a^{(i)}\frac{(\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!} \quad (10)$$

$$\overline{M_1M_1''}=\overline{MM_1}=\bar{v}_r\Delta t+\sum_{i=1}^{\infty}\bar{a}_r^{(i)}\frac{(\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!}$$

Vectorul $\overline{M_1''M_1'}$, în mişcarea de rotaţie a lui $\overline{M_1'M_1''}=\overline{MM_1}$ cu viteza unghiulară de transport $\bar{\omega}$ şi acceleraţiile calculate cu formula (6), se poate scrie în mod asemănător

$$\overline{M_1''M_1'} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \overline{MM}_1 \frac{(\Delta t)^i}{i!} \tag{11}$$

Ținînd seama de expresia (10) a lui $\overline{MM}_1$ se găsește

$$\overline{M_1''M_1'} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \left[\bar{v}_r \Delta t + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{a}_r^{(j)} \frac{(\Delta t)^{(j)}}{(1+j)!} \right] \frac{(\Delta t)^i}{i!}$$

sau

$$\overline{M_1''M_1'} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \bar{v}_r \frac{(\Delta t)^{i+1}}{i!} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_i a^{(j)} \frac{(\Delta t)^{i+j+1}}{i!\,(j+1)} \tag{12}$$

Dacă se introduc expresiile (10) și (12) în relația vectorială (9) se ajunge la următoarea egalitate vectorială

$$\bar{v}_a \Delta t + \bar{a}_a^{(i)} \frac{(\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!} = \bar{v}_t \Delta t + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_t^{(i)} \frac{(\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!} +$$

$$+ \bar{v}_r \Delta t + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_r^{(i)} \frac{(\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \bar{v}_r \frac{(\Delta t)^{i+1}}{i!} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_i \bar{a}_r^{(j)} \frac{(\Delta t)^{i+j+1}}{i!\,(j+1)!}. \tag{13}$$

Din această relație generală prin identificare se deduc toate legile de compunere a vitezelor și accelerațiilor de diferite ordine. Astfel, împărțind egalitatea (13) cu Δt, și făcînd apoi Δt să tindă la zero, se găsește

$$\bar{v}_a = \bar{v}_t + \bar{v}_r \tag{14}$$

După ce se înlocuiește relația (14) în egaliatctea (13), se poate împărți egalitatea (13) cu $(\Delta t)^2$ și prin trecere la limită se obține

$$\bar{a}_a = \bar{a}_t + \bar{a}_r + \bar{a}_c$$

Procedînd și în continuare astfel, rezultă :

$$\bar{a}_a^{(k)} = \bar{a}_t^{(k)} + \bar{a}_r^{(k)} + \bar{a}_c^{(k)} \tag{15}$$

Aici s-a notat prin $\bar{a}_c^{(k)}$ accelerația complimentară sau Coriolis de ordinul k a cărei expresie este

$$\bar{a}_c^{(k)} = (k+1)\beta_k \bar{v}_r + \sum_{i=1}^{k-1} C_{k+1}^{i+1} \beta_{k-1} \bar{a}_r^{(i)} \tag{16}$$

În mișcarea relativă deci, accelerațiile de diferite ordine se compun asemănător cu accelerațiile obișnuite, iar accelerația Coriolis de un ordin oarecare se exprimă cu ajutorul vitezei și accelerațiilor relative pînă la un ordin cu o unitate mai mică.

4. ACCELERAŢIA CORIOLIS

Expresia (16) a acceleraţiei Coriolis poate fi pusă şi sub alte forme. Astfel, deoarece acceleraţia Coriolis nu se obţine prin derivarea celei de un ordin mai mic în raport cu timpul, ar fi interesant să se stabilească relaţia de legătură dintre ele.

În expresia acceleraţiei Coriolis (16) operatorii β_i se aplică vectorilor $\bar{v}_r$ respectiv $\bar{a}_r^{(j)}(j=1, 2, ...)$ a căror proiecţii se cunosc faţă de sistemul de axe mobil. Aceasta înseamnă că derivatele lor se obţin astfel

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt}=\bar{a}_r+\beta_1\bar{v}_r, \qquad \frac{d\bar{a}_r^{(j)}}{dt}=\bar{a}_r^{(j+1)}+\beta_1\bar{a}_r^{(j)} \tag{17}$$

Folosind relaţiile (6) mai rezultă

$$\frac{d(\beta_i\bar{a}_r^{(j)})}{dt}=\beta^{i+1}\bar{a}_r^{(j)}+\beta_i\bar{a}_r^{(j+1)} \tag{18}$$

Dacă se derivează în raport cu timpul expresia (16) a lui $\bar{a}_c^{(k-1)}$ în care se ţine seama de relaţia (18) şi se compară cu expresia lui $\bar{a}_c^{(k)}$ se găseşte

$$\bar{a}_c^{(k)}=\dot{\bar{a}}_c^{(k-1)}+\beta_k\bar{v}_r+\beta_1\bar{a}_r^{(k-1)} \tag{19}$$

În particular pentru $k=2$ se obţine

$$\bar{a}_c^{(2)}=\dot{\bar{a}}_c+\beta_2\bar{v}_r+\beta_1\bar{a}_r$$

Pe de altă parte din relaţia (16), rezultă

$$\bar{a}_c^{(2)}=3\beta_2\bar{v}_r+3\beta_1\bar{a}_r$$

şi deci

$$\bar{a}_c^{(2)}=\frac{3}{2}\dot{\bar{a}}_c$$

Acest rezultat a mai fost demonstrat pe altă cale [4].

Relaţia (19) mai poate fi interpretată ca o formulă de recurenţă în care făcînd succesiv pe k egal cu $m, m+1 \ldots, m+p$ şi folosind relaţia (18), se găseşte

$$\bar{a}_c^{(m+p)}=[\bar{a}_c^{(m)}]^{(p)}+\sum_{i=1}^{p}C_p^i\left[\beta_i\bar{a}_c^{(m+p-i)}+\beta_{m+p-i+1}\bar{a}_r^{(i-1)}\right] \tag{20}$$

Această relaţie generalizează formula (19) şi exprimă legătura între acceleraţia Coriolis de un anumit ordin şi derivata unei acceleraţii Coriolis de ordin mai mic.

Din formula (19) se constată că acceleraţia Coriolis de un ordin oarecare nu se obţine prin derivarea celei de un ordin mai mic în raport cu timpul. Pentru ca să fie totuşi scrisă ca o derivată în raport cu timpul va trebui să se determine condiţia ca suma $\beta_k\bar{v}_r+\beta_1\bar{a}_r^{(k-1)}$ din formula (16) să fie derivata în raport cu timpul a unei anumite expresii.

Pentru aceasta se consideră relația (18) ca o formulă de recurență, în care făcînd i egal cu 1, 2, ... , $i-1$, i și înlocuind succesiv, se obține

$$\beta_{i+1}a_r^{(j)} = \sum_{l=1}^{i} (-1)^l C_i^l \frac{d^{i-l}[\beta_1 a^{(j+l)}]}{dt^{i-l}} \tag{21}$$

Folosind această relație se poate scrie

$$\beta_k \bar{v}_r + \beta_1 \bar{a}_r^{(k-1)} = \sum_{l=0}^{k-2} (-1)^l C_{k-1}^l \frac{d^{k-l-1}[\beta_1 \bar{a}_r^{(l)}]}{dt^{k-l-1}} + [1-(-1)^k]\, \beta_1 \bar{a}_r^{(k-1)}$$

care dacă k este un număr par nu va mai conține pe $\beta_1 a_r^{(k-1)}$.

Dacă $k=2p$ se obține

$$\bar{a}_c^{(2p)} = \frac{d}{dt}\left\{ \bar{a}_c^{(2p-1)} + \sum_{l=0}^{2p-1} (-1)^l C_{2p-1}^l \frac{d^{2p-l-2}[\beta_1 \bar{a}_r^{(l)}]}{dt^{2p-l-2}} \right\} \tag{22}$$

Rezultă că se pot pune sub forma de derivată în raport cu timpul a unei anumite expresii, accelerațiile Coriolis de ordin par.

Se poate determina în general o formulă pentru accelerația Coriolis în care să intervină numai $\bar{v}_r$ la fel ca și în expresia lui $\bar{a}_c$.

Pentru aceasta se pleacă tot de la relația (18) în care făcînd succesiv j egal cu 0, 1, 2, ... $j-1$ și apoi înlocuind, se obține

$$\beta_i \bar{a}_r^{(j)} = \sum_{l=0}^{j} (-1)^l C_j^l \frac{d^{j-l}(\beta_{i+l}\bar{v}_r)}{dt^{j-l}}$$

Dacă în relația (16) se introduc aceste expresii atunci accelerația Coriolis de ordin k va fi

$$\bar{a}_c^{(k)} = [1-(-1)^k]\, \beta_k \bar{v}_r + \sum_{a=1}^{k-1} \beta_a \frac{d^a (\beta_{k-a}\bar{v}_r)}{dt^a} \tag{23}$$

unde

$$\beta_a = \sum_{l=0}^{k-a-1} (-1)^l C_{k+1}^{a+l+1} C_{a+l}^l$$

Această relație generalizează expresia cunoscută a accelerației de ordinul întîi și exprimă în general accelerația Coriolis de un ordin oarecare numai în funcție de viteza relativă $\bar{v}_r$.

Se mai observă că dacă k este un număr par în expresia (23) va lipsi termenul care nu este derivat. S-a regăsit astfel un rezultat demonstrat mai sus și anume că accelerația Coriolis de un ordin par se poate exprima ca derivata unei anumite expresii.

BIBLIOGRAFIE

1. Melchior P.: Der Ruck. VDI Zeitschrift, Bd 72, Nr. 50, 1928
2. Burali-Forti C.: Stato cinetico; moto infinitesimo: teorema di Coriolis. Atti dell'Accademia delle Sci. di Torino, 60, 1925.
3. Mangeron D., Ciobanu Gh., Braiera A.: Asupra extinderii formulelor lui Somov relative la acceleraţii de diferite ordine. Revista Univ. Al. I. Cuza şi a Institutului politehnic Iaşi, tom II, fasc. 1—2, 1955.
4. Trailescus S.: Sur l'accéleration du second ordre. Bull. de Sci. et Techn. de la Polyt. de Timişoara, t 13, 1948.
5. Ripianua A., Tudosie C.: Asupra mişcării relative. Bul. St. al Inst. Polit. din Cluj, 5, 1962.
6. Stoenescu Al., Silas Gh.: *Mecanică teoretică*. Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.

ABOUT THE ADDITION OF HIGH ORDER ACCELERATIONS IN THE RELATIVE MOVEMENT.

(SUMMARY)

The addition law of accelerations in relative movement is demonstrated using a geometrical method which permitts its generalization also for the accelerations of high order. The expressions of Coriolis acceleration of different order are determined. Known results are obtained form them in particularly.

К СЛОЖЕНИЮ УСКОРЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА В ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

(РЕЗЮМЕ)

Закономерность сложения ускорений в относительном движении доказывается при помощи геометрического метода позволяющего обобщить эту закономерности на ускорення высшего порядка.

Определяются выражения кориолисового ускорения различного порядка, откуда выводятся известные результаты при определенных частных значенниях.

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIŞOARA

SERIA MATEMATICĂ–FIZICĂ–MECANICĂ
TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

Tomul 17(31) Fascicola 2

IULIE—DECEMBRIE
1972

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. em. dr. ing. GH. SILAȘ (redactor șef), prof. em. ing. C. AVRAM, m. c. al Academiei R.S.R., prof. dr. doc. ing. I. ANTON, m. c. al Academiei R.S.R., prof. dr.ing. M. BORNEAS, prof. dr. ing. M. BRAȘOVAN, prof. dr. ing. V. COCHECI, acad. prof. dr. doc. C. DRĂGULESCU, prof. dr. O. EM. GHEORGHIU, prof. ing. V. GHEORGHIU, prof. dr. ing. GH. SAVII, prof. ing. D. MATEESCU, prof. dr. ing. I. NOVAC.

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. dr. O. EM. GHEORGHIU (redactor responsabil), prof. dr. ing. M. BORNEAS (redactor responsabil adjunct), prof. dr. ing. GH. SILAȘ, prof. dr. B. CRSTICI, prof. dr. C. SIMOIU, conf. dr. ing. I. GROȘANU, conf. dr. ing. L. BRÎNDEU (secretar de redacție).

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC AL INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA" DIN TIMIŞOARA

SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ-MECANICĂ TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

Tom 17 (31) Fasc. 2 Iulie-decembrie 1972

SUMAR

GEIER A., FRIEDRICH G., FRIEDRICH R. : Rezolvarea unor ecuaţii cu derivate prţiale prin metoda colocaţiei 107

KISS M., MATEI ŞT. : Asupra unor algebre booleene finite generate de mulţimi de puncte 117

NEAGU M. : Soluţia cea mai generală a ecuaţiilor funcţionale de tipul teoremelor de adiţiune 123

TUDOR GH. : O formulă generală pentru calculul unor integrale definite 131

BORNEAS M. : Spaţiu timp şi masă 137

SILAŞ GH., BRÎNDEU L. : Studiul mişcării sistemelor vibropercutante cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange 141

SILAŞ GH., KLEPP H. : Punctele singulare şi stabilitatea lor la autovibraţiilor unui corp pe o suprafaţă cilindrică aspră în rotaţei uniformă 151

GROŞANU I. : Asupra stabilităţii regimurilor staţionare ale unor maşini 157

PILTEA N. : Asupra mişcării relative a rigidului 163

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ БЮЛЛЕТЕНЬ
ТИМИШОРСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. «ТРАЯН ВУЯ»
СЕРИЯ МАТЕМАТИКА—ФИЗИКА—ТЕХНИЧЕСКАЯ И
ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
Том 17(31) Выпуск 2. Июль—декабрь 1971 г

СОДЕРЖАНИЕ

ГАЕР А., ФРИДРИХ Г., ФРИДРИХ Р., Решение уравнений с частными производными методами коллокаций 107
КИШ М., МАТЕЙ ШТ., О конечных булевых алгебрах порождаемых множеством точок 117
НЯГУ М., Самое общее решение функциональных уравнений типа аддиционных теорем 123
ТУДОР Г., Одна общая формула для вычисления некоторых интегралов 131
БОРНЕАС М., Пространство время и масса 137
СИЛАШ Г., БРЫНДЕУ Л., Исследование движения виброударных систем при помощи уравнений Лагранжа 141
СИЛАШ Г., КЛЕПП Х., Особые точки и их устойчивость при собственных колебаниях тела на цилиндрической жесткой поверхности в равномерном движении 151
ГРОШАНУ И., К устойчивости стационарных режимов некоторых машин 157
ПЛИТЯ Н., К относительному движению твердого тела 163

BULLETIN SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
L'INSTITUT POLYTECHNIQUE „TRAIAN VUIA" DE TIMIŞOARA
SÉRIE MATHÉMATIQUE-PHYSIQUE-MECANIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉ
Tome 17 (31) Fasc. 2 Juillet-Decembre 1972

SOMMMAIRE

GEIER A., FRIEDRICH G. FRIEDRICH R. : Das Kollocationsverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen 107

KISS M., MATEI ŞT. : Über einge endliche booleanische Algebren die aus Punktemengen gebildet sind 117

NEAGU M. : La solution la plus générale de l'equation fonctionelle du type des théorèmes d'addition 123

TUDOR GH : Une formule générale pour le calcul des certains intégrales definies 131

BORNEAS M. : Space time and mass 137

SILAŞ GH. BRÎNDEU L. : Das Studium der Bewegung von Stosschwingern mit den Lagrageschen Gleichungen 141

SILAŞ GH., KLEPP H. : Die singulären Punkte und ihre Stabilität bei der Bewegung eines Körpers auf einer rauhen sich gleichförmig drehenden Zylinderfläche 151

GROŞANU I. : Über die Stabilität der stationären Bewegungszustände einiger Maschinen 157

PLITEA N. : On the solid-rigid relative motion 163

Buletinul şt. şi tehn. al I.P.T. Seria Mat.—Fiz.—Mec. teor. şi apl. Tom 17(31) fasc. 2/1972

REZOLVAREA UNOR ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE PRIN METODA COLOCAŢIEI

de

A. GEIER, G. FRIEDRICH şi R. FRIEDRICH

Fie

$$L[\gamma]=r \tag{1}$$

o ecuaţie diferenţială sau cu derivate parţiale, liniară, cu condiţii de margine liniare, arbitrare. Pentru această ecuaţie se caută o transpunere finită de forma

$$L\eta=\tau \tag{2}$$

unde L este pe cît posibil o matrice bandă, iar η este vectorul valorilor din nodurile reţelei, ale funcţiei de aproximare Y. Una din metodele care permite obţinerea unor asemenea transpuneri finite este metoda colocaţiei lui Falk [1], prin care se impune ca ecuaţia diferenţială sau cu derivate parţiale să fie satisfăcută în anumite puncte bine alese.

La ecuaţiile diferenţiale obişnuite drept funcţie de aproximare se consideră

$$Y(x)=S(x)+P(x)\ Z(x) \tag{3}$$

unde $S(x)$ este aşa numita funcţie de bază, ce poate fi de tip Lagrange sau de tip Hermite şi constituie partea principală a funcţiei de aproximare. Funcţia

$$P(x)=\Pi(x-x_i)^{\nu+1} \tag{4}$$

se consideră în aşa fel încît pentru o funcţie arbitrară $Z(x)$ care depinde de k parametri liberi, valorile în noduri ale lui $S(x)$ şi $Y(x)$ să coincidă. Desigur că tratarea problei este cea mai simplă în cazul cînd atît $S(x)$, cît şi $Z(x)$ sînt polinoame.

Formula (3) este generală şi conţine drept cazuri particulare metoda obişnuită a diferenţelor finite, precum şi metoda plurilocală a lui Collatz. Dacă în formula (3) $S(x)$ este de tip Lagrange, iar $Z(x)$ nu apare, atunci colocaţia într-un singur punct al unui interval parţial ne conduce la metoda diferenţelor finite obişnuită; dacă însă se consideră efectiv şi funcţia adaos $Z(x)$, ce depinde de k parametri liberi, atunci prin colocaţia în $k+1$ puncte pentru fiecare interval parţial, se regăseşte metoda plurilocală a lui Collatz.

W a g n e r [3], a studiat ecuaţia diferenţială de ordinul doi. Metoda colocaţiei lui Falk se poate extinde cu succes la ecuaţiile cu derivate parţiale. K l a g e s [2] a aplicat această metodă pentru ecuaţii cu derivate parţiale de

ordinul doi, de formă specială. El a construit funcția de aproximare a soluției pe subdomenii, dintr-un polinom de tip Lagrange $S(\xi,\eta)$ și din produsul polinoamelor $P(\xi,\eta)$ și $Z(\xi,\eta)$, ξ și η fiind coordonate adimensionale. Numărul parametrilor liberi din funcția adaos $Z(\xi,\eta)$ depinde de numărul punctelor de colocație alese pe subdomeniu; adică pentru $k+1$ puncte de colocație pe subdomeniu corespund k parametri în funcția adaos asociată. K l a g e s a studiat pentru ecuații cu derivate parțiale de forma

$$\alpha w_{\xi\xi}+2\beta w_{\xi\eta}+\gamma w_{\eta\eta}=r(\xi,\eta) \tag{5}$$

unde α, β și γ sînt constante, cazul a cinci puncte de colocație, a unui punct de colocație, precum și a nouă puncte de colocație, numărul nodurilor fiind de fiecare dată 9. Rezultatele cele mai apropiate de soluția exactă le-a obținut în cazul a 5 puncte de colocație.

Remarcăm faptul că în metoda folosită de K l a g e s subdomeniile învecinate se acoperă reciproc. În aceste subdomenii, valorile funcțiilor de aproximare corespunzătoare coincid numai în noduri, iar în restul punctelor diferă.

În prezenta lucrare ne-am propus studiul ecuației

$$\Delta u=R(x,y)$$

înlocuind polinomul de tip Lagrange ce reprezintă funcția de bază cu un polinom de tip Hermite și renunțînd totodată la funcția adaos Z. Astfel, pentru subdomeniile ce se acoperă, vor coincide în noduri nu numai valorile funcțiilor de aproximare corespunzătoare acestor subdomenii, ci și derivatele lor parțiale cuprinse în polinomul de tip Hermite.

Considerăm deci ecuația

$$u_{xx}+u_{yy}=R(x,y) \tag{6}$$

în interiorul dreptunghiului (D) ale cărui laturi aparțin dreptelor $x=0$, $x=L$, $y=0$, $y=L'$, valorile marginale ale funcției u fiind presupuse cunoscute.

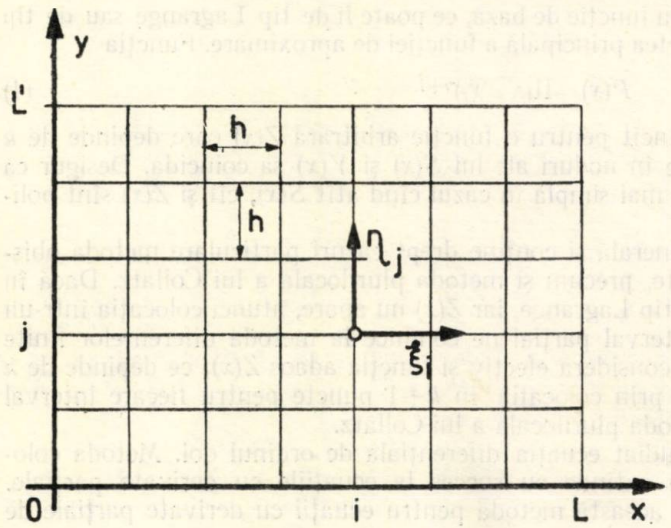


Fig. 1. Dreptunghiul (D), conținînd subdomeniile (i, j).

Notăm

$$\xi=\frac{x}{h}, \quad \eta=\frac{y}{h},$$

unde h este pasul rețelei pătratice, iar $\xi=i+\xi_i$

$$\eta=j+\eta_j$$

Apoi, pe baza formulelor

$$\begin{aligned} x&=(i+\xi_i)h \qquad i=1,2,\ldots,n-1 \\ y&=(j+\eta_j)h \qquad j=1,2,\ldots,m-1 \end{aligned} \tag{7}$$

unde $\xi_i \in [-1,1]$, $\eta_j \in [-1,1]$

se obțin operatorii diferențiali

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta_j^2} \tag{8}$$

care permit transcrierea ecuației cu derivate parțiale pentru fiecare subdomeniu în parte.

În cazul nostru pentru subdomeniul (i,j) ecuația cu derivate parțiale se obține sub forma adimensională

$$u_{\xi_i\xi_i}+u_{\eta_j\eta_j}=r(\xi_i,\eta_j) \tag{9}$$

Tratarea problemei am făcut-o în două moduri:

I. Domeniul de colocație (i,j) (vezi fig. 2) conține 5 noduri și 5 puncte de colocație.

În acest caz pentru ca în final în transpunerea finită a ecuației cu derivate parțiale, numărul de ecuații să coincidă cu numărul de necunoscute, este necesar ca subdomeniul (i,j) să fie acoperit de 4 subdomenii învecinate.

Considerăm ca funcție de aproximare un polinom

$$\begin{aligned} U(\xi_i,\eta_j)=&A_0+A_1\xi_i+A_2\eta_j+A_3\xi_i^2+ \\ &+A_4\eta_j^2+A_5\xi_i^3+A_6\eta_j^3+A_7\xi_i^4+A_8\eta_j^4 \end{aligned} \tag{10}$$

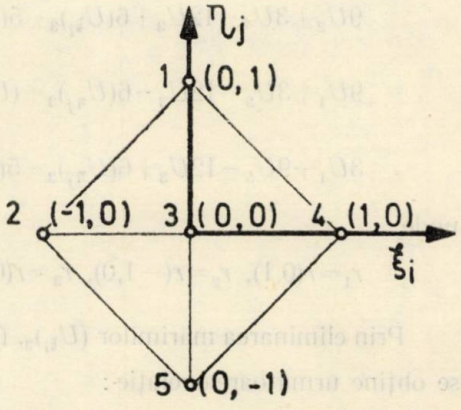


Fig. 2. Domeniul de colocație (i, j) cu 5 noduri.

pentru care impunem condițiile:

$$U(0,0)=U_3,\ U(0,1)=U_1,\ U(-1,0)=U_2,$$

$$U(1,0)=U_4,\ U(0,-1)=U_5,\ \frac{\partial U(0,0)}{\partial \xi_i}=(U_{\xi i})_3 \tag{11}$$

$$\frac{\partial U(0,0)}{\partial \eta_j}=(U_{\eta j})_3,\ \frac{\partial^2 U(0,0)}{\partial \xi_i^2}=(U_{\xi_i^2})_3,\ \frac{\partial^2 U(0,0)}{\partial \eta_j^2}=(U_{\eta_j^2})_3.$$

Rezolvînd sistemul astfel format în raport cu necunoscutele $A_i (i=0, \ldots, 8)$, se obține funcția de aproximare sub forma:

$$U(\xi_i,\eta_j)=\frac{1}{2}(\eta_j^3+\eta_j^4)U_1+\frac{1}{2}(\xi_i^4-\xi_i^3)U_2+(1-\xi_i^2-\xi_i^4)U_3+$$

$$+\frac{1}{2}(\xi_i^3+\xi_i^4)U_4+\frac{1}{2}(\eta_j^4-\eta_j^3)U_5+(\xi_i-\xi_i^3)(U_{\xi i})_3+(\eta_j-\eta_j^3)(U_{\eta j})_3+$$

$$+\frac{1}{2}(\xi_i^2-\xi_i^4)(U_{\xi_i^2})_3+\frac{1}{2}(\eta_j^2-\eta_j^4)(U_{\eta_j^2})_3 \tag{12}$$

Făcînd colocația în cele 5 puncte, rezultă următoarele relații:

$$(U_{\xi_i^2})_3+(U_{\eta_j^2})_3=r_3$$

$$3U_2+9U_4-6(U_{\xi i})_3-12U_3-5(U_{\xi_i^2})_3+(U_{\eta_j^2})_3=r_4$$

$$9U_2+3U_4-12U_3+6(U_{\xi i})_3-5(U_{\xi_i^2})_3+(U_{\eta_j^2})_3=r_2 \tag{13}$$

$$9U_1+3U_5-12U_3-6(U_{\eta j})_3+(U_{\xi_i^2})_3-5(U_{\eta_j^2})_3=r_1$$

$$3U_1+9U_5-12U_3+6(U_{\eta j})_3-5(U_{\eta_j^2})_3+(U_{\xi_i^2})_3=r_5$$

unde

$$r_1=r(0,1),\ r_2=r(-1,0),\ r_3=r(0,0),\ r_4=r(1,0),\ r_5=r(0,-1).$$

Prin eliminarea mărimilor $(U_{\xi i})_3$, $(U_{\eta j})_3$, $(U_{\xi_i^2})_3$, $(U_{\eta_j^2})_3$, între cele 5 ecuații se obține următoarea relație:

$$12(U_1+U_2+U_4+U_5)-48U_3-(r_1+r_2+r_3+r_4)-8r_3=0 \tag{14}$$

Deci transpunerea finită a ecuației cu derivate parțiale pentru subdomeniul (i,j), exprimată cu ajutorul operatorilor este :

$$\begin{bmatrix} & 12 & \\ 12 & -48 & 12 \\ & 12 & \end{bmatrix} [U_i] - \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 8 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} [r_i] \simeq 0 \tag{15}$$

În cazul particular cînd $r=k=$const., se obține relația

$$U_1+U_2+U_4+U_5-4U_3-k\simeq 0, \tag{16}$$

care coincide cu transpunerea finită a ecuației cu derivate parțiale, cînd se folosește metoda obișnuită a diferențelor finite ; deci în acest din urmă caz ($\Delta u=k$(este evident că aplicarea metodei colocației nu aduce îmbunătățiri față de metoda diferențelor finite în ceea ce privește exactitatea valorilor funcției de aproximare în noduri, spre deosebire de cazul general, cînd membrul drept, r nu este constant.

Aplicînd formula (14) în fiecare nod interior al domeniului (D), se obține un sistem liniar, care prin rezolvare ne furnizează valorile U_i din noduri. Înlocuind valorile obținute în patru din cele cinci ecuații ale sistemului (13), acestea se pot rezolva, furnizîndu-ne valorile derivatelor parțiale $(U_{\xi_i})_3$, $(U_{\eta_j})_3$, $(U_{\xi_i^2})_3$, $(U_{\eta_j^2})_3$ din nodul central al subdomeniului (i,j) :

$$(U_{\xi_i})_3 = \frac{6(U_4-U_2)+(r_2-r_4)}{12}$$

$$(U_{\eta_j})_3 = \frac{6(U_1-U_5)+(r_5-r_1)}{12} \tag{17}$$

$$(U_{\xi_i^2})_3 = \frac{60(U_2+U_4-2U_3)+12(U_1+U_5-2U_3)-(r_1+r_5+5r_2+5r_4)}{48}$$

$$(U_{\eta_j^7})_3 = \frac{60(U_1+U_5-2U_3)+12(U_2+U_4-2U_3)-(r_2+r_4+5r_1+5r_5)}{48} \tag{17}$$

Înlocuind mărimile determinate în (12), putem scrie expresia funcției de aproximare $(U_{\xi_i,\eta_{\eta_j}})$ pentru subdomeniul (i,j).

Deoarece, aplicînd metoda colocației, dispunem de o soluție exprimată sub formă analitică, avem posibilitatea de a calcula valorile aproximative ale soluției, precum și valorile aproximative ale derivatelor parțiale, nu numai în noduri, ci în orice punct al domeniului (D).

Considerăm drept un avantaj faptul că derivatele parțiale de ordinul I, precum și cele de ordinul II, exceptînd derivata mixtă, sînt calculate în prealabil prin intermediul formulelor (13) în fiecare nod interior, acest lucru fiind necesar pentru a putea scrie expresia funcției de aproximare.

II. Domeniul de colocație (i,j) conține 9 noduri și 5 puncte de colocație (vezi fig. 3).

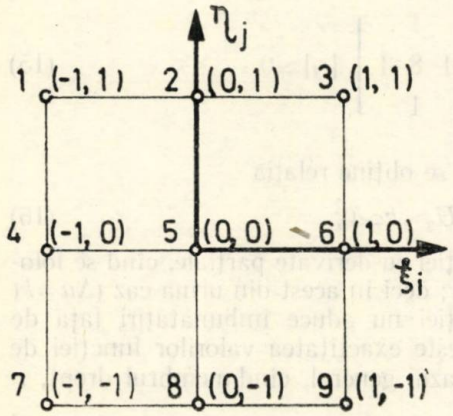


Fig. 3. Domeniul de colocație (i, j) cu 9 noduri.

În acest caz sub domeniul (i,j) trebuie să fie acoperit de 8 subdomenii învecinate.

Ca funcție de aproximare pe subdomeniul (i,j) se consideră polinomul

$$U(\xi_i,\eta_j)=A_0+A_1\xi_i+A_2\eta_j+A_3\xi_i^2+$$
$$+A_4\xi_i\eta_j+A_5\eta_j^2+A_6\xi_i^3+A_7\xi_i^2\eta_j+$$
$$+A_8\xi_i\eta_j^2+A_9\eta_j^3+A_{10}\xi_i^2\eta_j^2+A_{11}\xi_i^4+$$
$$+A_{12}\eta_j^4 \qquad (18)$$

care trebuie să satisfacă condițiile:

$$U(-1,1)=U_1,\ U(0,1)=U_2,\ U(1,1)=U_3,\ U(-1,0)=U_4,$$
$$U(0,0)=U_5,\ U(1,0)=U_6,\ U(-1,-1)=U_7,\ U(0,-1)=U_8, \qquad (19)$$
$$U(1,-1)=U_9,\ \frac{\partial U(0,0)}{\partial\xi_i}=(U_{\xi_i})_5,\ \frac{\partial U(0,0)}{\partial\eta_j}=(U_{\eta_j})_5,$$
$$\frac{\partial^2 U(0,0)}{\partial\xi_i^2}=(U_{\xi_i^2})_5,\ \frac{\partial^2 U(0,0)}{\partial\eta_j^2}=(U_{\eta_j^2})_5.$$

Rezolvînd acest sistem în raport cu necunoscutele A_i $(i=0,1,2,\ldots,12)$ și înlocuind expresiile obținute în (18) rezultă:

$$U(\xi_i,\eta_j)=\frac{1}{4}(-\xi_i\eta_j+\xi_i^2\eta_j-\xi_i\eta_j^2+\xi_i^2\eta_j^2)U_1+\frac{1}{2}(-\xi_i^2\eta_j+\eta_j^3-\xi_i^2\eta_j+$$
$$+\eta_j^4)U_2+\frac{1}{4}(\xi_i\eta_j+\xi_i^2\eta_j+\xi_i\eta_j^2+\xi_i^2\eta_j^2)U_3+\frac{1}{2}(-\xi_i^3-\xi_i^2\eta_j^2+\xi_i^4+$$
$$+\xi_i\eta_j^2)U_4+(1+\xi_i^2\eta_j^2-\xi_i^4-\eta_j^4)U_5+\frac{1}{2}(\xi_i^3-\xi_i\eta_j^2-\xi_i^2\eta_j^2+\xi_i^4)U_6+$$
$$+\frac{1}{4}(-\xi_i^2\eta_j-\xi_i\eta_j^2+\xi_i^2\eta_j^2+\xi_i\eta_j)U_7+\frac{1}{2}(\xi_i^2\eta_j-\eta_j^3-\xi_i^2\eta_j^2+\eta_j^4)U_8+$$

$$+\frac{1}{4}(-\xi_i\eta_j-\xi_i^2\eta_j+\xi_i\eta_j^2+\xi_i^2\eta_j^2)U_9+(\xi_i-\xi_i^3)(U_{\xi_i})_5+$$

$$+(\eta_j-\eta_j^3)(U_{\eta_j})_5+\frac{1}{2}(\xi_i^2-\xi_i^4)(U_{\xi_i^2})_5+\frac{1}{2}(\eta_j^2-\eta_j^4)(U_{\eta_j^2})_5 \tag{20}$$

Făcînd colocație în punctele 2, 4, 5, 6, și 8, rezultă relațiile :

$$\begin{aligned}
&(U_{\xi_i^2})_5+(U_{\eta_j^2})_5=r_5\\
&U_1+7U_2+U_3-U_4-10U_5-U_6+3U_8-6(U_{\eta_j})_5+(U_{\xi_i^2})_5-5(U_{\eta_j^2})_5=r_2\\
&-U_2+U_3+3U_4-10U_5+7U_6-U_8+U_9-6(U_{\xi_i})_5-\\
&-5(U_{\xi_i^2})_5+(U_{\eta_j^2})_5=r_6\\
&3U_2-U_4-10U_5-U_6+U_7+7U_8+U_9+6(U_{\eta_j})_5+(U_{\xi_i^2})_5-5(U_{\eta_j^2})_5=r_8\\
&U_1-U_2+7U_4-10U_5+3U_6+U_7-U_8+6(U_{\xi_i})_5-5(U_{\xi_i^2})_5+(U_{\eta_j^2})_5=r_4
\end{aligned} \tag{21}$$

unde

$$r_5=r(0,0),\ r_2=r(0,1),\ r_6=r(1,0),\ r_4=r(-1,0),\ r_8=r(0,-1).$$

Eliminînd mărimile $(U_{\xi_i})_5$, $(U_{\eta_j})_5$, $(U_{\xi_i^2})_5$, $(U_{\eta_j^2})_5$ între cele 5 ecuații, se obține relația :

$$2(U_1+U_3+U_7+U_9)+8(U_2+U_4+U_6+U_8)-40U_5-8r_5-(r_2+r_4+r_6+r_8)=0, \tag{22}$$

ceea ce se poate scrie sub forma :

$$\begin{bmatrix}2 & 8 & 2\\ 8 & -40 & 8\\ 2 & 8 & 2\end{bmatrix}[U_i]-\begin{bmatrix}&1&\\1&8&1\\&1&\end{bmatrix}[r_i]\simeq 0 \tag{23}$$

Aceasta este transpunerea finită a ecuației cu derivate parțiale pentru subdomeniul (i,j). Se constată că acest rezultat coincide cu cel obținut de K l a g e s considerînd funcția de aproximare alcătuită dintr-un polinom de tip Lagrange construit cu ajutorul a 9 noduri și dintr-o funcție adaos $Z(\xi,\eta)$ reprezentată printr-un polinom ce depinde de 4 parametri liberi și făcînd apoi

colocația în 5 puncte. Formula (23) coincide de asemenea și cu rezultatul prezentat de Collatz [4], prin aplicarea metodei plurilocale. Însă spre deosebire de metoda plurilocală care furnizează valorile funcției de aproximare numai în noduri, metoda colocației, după cum am mai accentuat, permite calculul valorilor funcției de aproximare și a derivatelor parțiale în orice punct al domeniului (D). În cazul polinomului de tip Hermite considerat în prezentul articol, calculul derivatelor parțiale de ordinul I și a celor de ordinul II în noduri, excepțînd derivata mixtă, nu necesită o operație în plus, deoarece pentru scrierea polinomului (20) pentru subdomeniul (i,j) este necesară rezolvarea a patru ecuații făcînd parte din sistemul (21).

Astfel se obține:

$$(U_{\xi_i})_5 = \frac{4(U_6-U_4)+(U_3-U_1)+(U_9-U_7)}{12}$$

$$(U_{\eta_j})_5 = \frac{4(U_2-U_8)+(U_3-U_9)+(U_1-U_7)}{12}$$

$$(U_{\xi_i^2})_5 = \frac{6(U_1+U_3+U_7+U_9)+48(U_4+U_6)-120U_5-5(r_4+r_6)-(r_2+r_8)}{48}$$

$$(U_{\eta_j^2})_5 = \frac{6(U_1+U_3+U_7+U_9)+48\ (U_2+U_8)-120U_5-5(r_2+r_8)-(r_4+r_6)}{48}$$

BIBLIOGRAFIE

[1] S. Falk, Eine Variante zum Differenzenverfahren, ZAMM, Bd. 45, Sonderheft 1965.

[2] H. Klages, *Ein Verfahren zur Lösung der Plattengleichung durch Kollokation*, Braunschweig, 1968.

[3] H. W. Wagner, *Ein neues Näherungsverfahren zur Berechnung statischer und kinetischer Probleme bei Rahmen und Balken*, Braunschweig, 1965.

[4] L. Collatz, *The numerical treatment of differential equations*, Springer-Verlag, Berlin 1966.

РЕШНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИЙ

(РЕЗЮМЕ)

На основе метода коллокаций Фалка, в данной роботе даётся решение дифференциальных уравнений с частными производными в случае краевых условий. Используются полиномы Гермита.

DAS KOLLOKATIONSVERFAHREN ZUR LÖSUNG PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ZUSAMMENFASSUNG

Ausgehend von dem Falk'schen Kollokationsverfahren wird die Lösung einiger partieller Differentialgleichungen behandelt, wobei Hermite' sche Polynome verwendet werden.

DAS KOLLOKATIONSVERFAHREN ZUR LÖSUNG PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ZUSAMMENFASSUNG

Ausgehend von dem Faik'schen Kollokationsverfahren wird die Lösung einiger partieller Differentialgleichungen behandelt, wobei Hermite'sche Polynome verwendet werden.

Buletinul şt. şi tehn. al I.P.T. Seria Mat.—Fiz.—Mec. teor. şi apl. Tom 17(31) fasc. 2/1972

ASUPRA UNOR ALGEBRE BOOLEENE FINITE GENERALE DE MULŢIMI DE PUNCTE

DE

M. KISS şi ŞT. MATEI

I. INTRODUCERE

Un exemplu relativ simplu de algebră booleeană îl constituie mulţimea $P(\Omega)$ a tuturor părţilor unei mulţimi de puncte Ω. În acest caz operaţiile booleene „$\cap$„ (intersecţie), „$\cup$“ (reuniune) şi „$-$“ (complementare) coincid cu operaţiile de intersecţie, reuniune şi complementare din teoria mulţimilor. Elementul unitate al acestei algebre booleene este întreaga mulţime Ω, iar elementul nul mulţimea vidă $\emptyset$. În timpul demonstraţiilor s-a utilizat sistemul axiomatic şi rezultatele prezentate de R. Sikorski în [1] precum şi unele informaţii prezentate de R. L. Goodstein în [3] în legătură cu algebra booleeană a perechilor de elemente. Dacă se notează cu A algebra booleeană a perechilor de elemente, fiecare element al său $X=(A,B)$ este format din două elemente A şi B aparţinînd unei algebre booleene B. În A se definesc complementara, reuniunea şi intersecţia apoi se verifică sistemul axiomatic al lui Hutington, echivalent cu cel propus de R. Sikorski.

1. Complementara :

Prin definiţie : $\overline{X}=\overline{(A,B)}=(\overline{A},B)$

2. Reuniunea :

Prin definiţie : $X_1 \cup X_2=(A_1,B_1)\cup(A_2,B_2)=(A_1\cup A_2, B_1\cap B_2)$

3. Intersecţia.

Prin definiţie : $X_1\cap X_2=(A_1,B_1)\cap(A_2,B_2)=(A_1\cap A_2, B_1\cup B_2)$

II. ALGEBRE BOOLEENE GENERATE DE MULŢIMI DE PUNCTE.

În această lucrare ne propunem să aflăm efectiv unele algebre booleene generate de o mulţime finită de puncte $\Omega_k=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$, (notînd prin a_k punctele acestei mulţimi), principalele lor proprietăţi, apoi să determinăm algebrele booleene ale perechilor de elemente pentru aceste algebre, precum şi corespondenţele dintre ele.

1. Cu ajutorul mulţimii $\Omega_0=\emptyset$ se formează algebra booleeană degenerată $B_1^\circ=\{0\}$ cu un singur element.

2. Din $\Omega_1=\{a_1\}$ se obţine algebra booleeană $B_2^\circ=\{1,0\}$ în care $1=\Omega, 0=\emptyset$. Aceasta este algebra cu două elemente 0 şi 1 folosită în logica bivalentă, studiul circuitelor cu două stări etc. Ea nu are nici o subalgebră proprie.

3. Porbind de la mulţimea $\Omega_2=\{a_1,a_2\}$ se obţine algebra booleeană : $B_{2^2}^\circ=B_4^\circ=\{0,1,a_1,a_2\}$ cu 4 elemente. Subalgebrele acestei algebre sînt : $B_2^\circ=\{1,0\}$ şi ea însăşi. Atomii lui B_4° sînt a_1,a_2. Dacă din B_4° omitem cîte unul sau două elemente înafară de B_2° se obţin şi alte structuri algebrice cu care nu ne ocupăm în lucrarea de faţă.

4. Din $\Omega_3=\{a_1,a_2,a_3\}$ se formează algebra booleeană :
$B_{2^3}^\circ=B_8^\circ=\{1,0,a_1,a_2,a_3,\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3a\},\{a_2,a_3\}\}=\{1,0,a_1,a_2,a_3,\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3\}$ avînd $n=2^3$ elemente în care $0=\emptyset$; $1=\Omega_3$. Atomii acestei algebre booleene sînt punctele a_1, a_2, a_3 deci o algebră cu 2^3 elemente are trei atomi .
Subalgebrele acestei algebre sînt : $B_2^\circ=\{1,0\}$, $B_4^{\circ 1}=\{1,0,a_1,\bar{a}_1\}$, $B_4^{\circ 2}=\{1,0,a_2,\bar{a}_2\}$ $B_4^{\circ 3}=\{1,0,a_3,\bar{a}_3\}$,
în care $\bar{a}_{l_1}=\{a_{l_2},a_{l_3}\}$, l_1, l_2, l_3 - $l_1\neq l_2\neq l_3$. Atomii acestor subalgebre booleene sînt; a_{l_1}, a_{l_2}. Deci din B_8° se obţin 4 subalgebre proprii şi o subalgebră improprie B_8° din care neizomorfe doar două.

5. Cu ajutorul mulţimii de puncte $\Omega_4=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ se obţine algebra booleeană :
$B_{2^4}^\circ=B_{16}^\circ=\{1,0\ a_1, a_2, a_3, a_4, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3,\}\ \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_4\}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4\}$ numărul elementelor este : $n=C_4^\circ+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=2^4=16$.
Atomii acestor algebre sînt : a_1, a_2, a_3, a_4. Din B_{16}° obţinem următoarele subalgebre booleene :

a. $B_2^\circ=\{1,0\}$, adică $C_4^\circ=1$ subalgebre de acest tip.

b. $B_4^{\circ l_1}=\{1,0,a_{l^1},\bar{a}_{l_1}\}$ unde $l_1=1, 2, 3, 4$ avînd ca atomi a_{l_1}, $\bar{a}_{l_1}$. Avem $C_4^1=4$ subalgebre de acest tip.

c. $B_8^{\circ l_1 l_2}$ $\{=\{1, 0, a_{l_1}, a_{l_2}, \bar{a}_{l_1}, \bar{a}_{l_2}, \{a_{l_1}, a_{l_2}\}, \overline{\{a_{l_1}, a_{l_2}\}}\ \}$, $l_1\neq l_2$, l_1, $l_2=1, 2, 3, 4$
Avem $C_4^2=6$ subalgebre de acest tip avînd fiecare cîte trei atomi de forma a_{l_1}, a_{l_2}, $\overline{\{a_{l_1}, a_{l_2}\}}$.

d. $B_4^{\circ(l_1,l_2)}=\{1, 0, \{a_{l_1}, a_{l_2}\}, \{a_{l_1}, a_{l_2}\}\}$; l_1, $l_2=1, 2, 3, 4$; $l_1\neq l_2$. Se obţin $\frac{1}{2}C_4^2=3$ subalgebre de acest tip avînd ca atomi elementele :

$\{a_{l_1}, a_{l_2}\}$, $\overline{\{a_{l_1}, a_{l_2}\}}$.

e. subalgebra improprie : $B_{16}^\circ=B_{16}^{\circ l_1 l_2 l_3}$,

deci se obţin $C_4^\circ+C_4^1+C_4^2+\frac{1}{2}C_4^2=14$ subalgebre din care neizomorfe doar patru.

6. Pornind de la $\Omega_5=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ obţinem alegebra booleeană :
$B_{2^5}^\circ=B_{32}^\circ=\{1, 0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5, \{a_1, a_2\}, \ldots \{a_4, a_5\}, \overline{\{a_1, a_2\}}, \ldots .$
$\ldots \overline{\{a_4, a_5\}}\ \}$

în care de exemplu : $\bar{a}_1=\{a_2, a_3, a_4, a_5\}$, iar $\overline{\{a_1, a_2\}}=\{a_3, a_4, a_5\}$. Această algebră are : $C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=2^5$ elemente și ca atomi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Din B_{32}° se obțin următoarele tipuri de subalgebre booleene :

a. $B_2^\circ=\{0,1\}$ adică $C_5^0=1$ subalgebre

b. $B_4^{\circ l_1}=\{1, 0, a_{l_1}, \bar{a}_{l_1}\}$, $l_1=1, 2, 3, 4, 5$, deci $C_5^1=5$ subalgebre de acest tip avînd drept atomi elementele : a_{l_1}, $\bar{a}_{l_1}$

c. $B_8^{\circ l_1 l_2}=\{1, 0, a_{l_1}, \bar{a}_{l_1}, a_{l_2}, \bar{a}_{l_2}, \{a_{l_1}, a_{l_2}\}, \overline{\{a_{l_1}, a_{l_2}\}}\}$; $l_1, l_2=1, 2, 3, 4, 5$; $l_1\neq l_2$. Se obțin $C_5^2=10$ subalgebre de acest tip avînd drept atomi elementele a_{l_1}, a_{l_2}, $\overline{\{a_{l_1}, a_{l_2}\}}$

d. $B_{16}^{\circ l_1 l_2 l_3}=\{1, 0, a_{l_1}, a_{l_2}, a_{l_3}, \bar{a}_{l_1}, \bar{a}_{l_2}, \bar{a}_{l_3}, \{a_{l_1}, a_{l_2}\}, \{a_{l_1}, a_{l_3}\}, \{a_{l_2}, a_{l_3}\}, \overline{\{a_{l_1}, a_{l_2}\}}$ $\overline{\{a_{l_1}, a_{l_3}\}}, \overline{\{a_{l_2}, a_{l_3}\}}, \{a_{l_1}, a_{l_2}, a_{l_3}\}, \overline{\{a_{l_1}, a_{l_2}, a_{l_3}\}}\}$; $l_1, l_2, l_3=1, 2, 3, 4, 5$; $l_1\neq l_2\neq l_3$ Se obțin $C_5^3=10$ subalgebre de acest tip avînd drept atomi elementele de formă

$$a_{l_1}, a_{l_2}, a_{l_3}, \overline{\{a_{l_1}, a_{l_2}, a_{l_3}\}}$$

e. $B_4^{\circ(l_1,l_2)}=\{1, 0, \{a_{l_1}, a_{l_2}\}, \overline{\{a_{l_1}, a_{l_2}\}}\}$; $l_1\neq l_2$; $l_1, l_2=1, 2, 3, 4, 5$. Se obțin $C_5^2=10$ asemenea subalgebre avînd ca atomi elementele de formă $\{a_{l_1}, a_{l_2}\}$, $\overline{\{a_{l_1} a_{l_2}\}}$

f. $B_8^{\circ(l_1,l_2)(l_3,l_4)}=\{1, 0, \{a_{l_1}, a_{l_2}\}, \{a_{l_3}, a_{l_4}\}, \overline{\{a_{l_1}, a_{l_2}\}}, \overline{\{a_{l_3}, a_{l_4}\}}, a_{l_5}, \bar{a}_{l_5}\}$

Numărul acestor subalgebre este $\frac{1}{2}C_5^2=5$, atomii fiind elementele de forma $\{a_{l_1}, a_{l_2}\}$, $\{a_{l_3}, a_{l_4}\}$, a_{l_5}.

Deci din B_{32}° se obțin $2C_5^0+2C_5^1+2C_5^2+C_5^3=42$ subalgebre booleene cu 2, 4, 8, 16 32 elemente împreună cu subalgebra improprie B_{32}° din care neizomorfe doar cinci.

7. Pornind de la $\Omega_k=\{a_1, a_2, \ldots a_k\}$ se obține algebra booleeană : $B_n^\circ=B_{2^k}^\circ=$ $=\{1, 0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k, \{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_{k-1}, a_k\}, \overline{\{a_1, a_2\}}, \ldots \overline{\{a_{k-1}, a_k\}}$, $\ldots \{a_{l_1}, a_{l_2}, \ldots, a_{l_i}\} \ldots \overline{\{a_{l_1}, a_{l_2}, \ldots a_{l_i}\}}\}$ $l_1, l_2, \ldots, l_i=1, 2, \ldots k$ $l_1\neq l_2\neq \ldots l_i$; $i=E\left(\frac{k}{2}\right)$ (partea întreagă) și de exemplu :

$$a_j=\{a_1, a_2, \ldots a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots a_k\}$$

Aceste algebre au $C_k^0+C_k^1+C_k^2+\ldots+C_k^k=2^k$ elemente deci k atomi. Din aceasta algebră booleeană se obțin subalgebre booleene cu : 2, 4, 8 ... 2^{k-1}, elemente și anume neizomorfe k asemenea subalgebre.

III. ALGEBRE BOOLEENE GENERATE DE B_n°.

Pornind de la rezultatele prezentate de R. L. Goodstein în [3] și de la rezultatele obținute în [6] autorii au studiat următoarele algebre booleene ale perechilor de elemente generate de $B_n^\circ=B_{2^k}^\circ=\{V_1, V_2, \ldots V_n\}$ în care au notat pentru simplificarea calculelor $V_1=1$, $V_2=0$, $V_3=a_1, V_4=a_2, \ldots, V_n=\overline{\{a_{l_1}, a_{l_2}\ldots,}$ $\ldots, a_{l_i}\}$ unde $n=2^k$

1. Algebra booleeană B_n^1. Ea are $A_n^2=n^2=2^{2k}$ (aranjamente cu repetiţie) elemente. Vom nota $2^1=p_1$ deci numărul elementelor ei este $nl^1=2^{kp_1}$. Elementele acestei algebre le notăm cu a_{ni}^1; $i=1, 2, \ldots n^{p_1}$. Ele sînt elementele de forma:

$a_{n_1}^1=1_n^1=(1, 0)$ elementul unitate

$a_{n_2}^1=0_n^1=(0,1)$ elementul nul

$a_{n_i}^1=(V_l, V_k)$; $l,k=1,2, \ldots n$ un element oarecare.

Legile de compunere sînt cele specificate în introducere. Se verifică că această algebră este închisă faţă de reuniune, intersecţie şi complementare apoi se verifică sistemul axiomatic al lui R. Sikorski pentru $n=2,4,8, \ldots 2^k$

2. Algebra booleeană B_n^2

Ea este generată de $B_n^1=\{a_{n_1}^1, a_{n_2}^1 \ldots a_{n_\eta p^1}^1\}$ şi are: $A_{np^1}^2=2^{4k}=n^{p2}$ elemente în care $p_2=2^2{}_2$.

Elementele lui B_n^2 le vom nota cu: $a_{n_i}=[(V_e,V_k), (V_p, V_q)]$ $i=1,2, \ldots n^{p2}$ $l,k,p,q=1,2, \ldots n$. Se verifică că şi această algebră este închisă faţă de reuniune, intersecţie, complementară şi sistemul axiomatic al lui R. Sikorski.

3. Algebra booleeană B_n^3

Este generată de $B_n^2=\{a_{n_1}^2, a_{n_2}^2, \ldots, a_{n_\eta p^2}\}$ şi are $A_{np^2}^2=\eta^{p_3}=2^{8k}$ elemente unde am notat $p_3=2^3$. Vom nota elementele acestei algebre cu $a_{n_i}^3$, $i=1,2, \ldots \eta^{p^3}$. Se arată că şi B_n^3 este o algebră booleeană prin acelaşi procedeu.

4. Algebra booleeană B_n^ν.

Prin inducţie se obţine algebra booleeană B_n^ν din $B_n^{\nu-1}$ în care $B_n^{\nu-1}=\{a_{n_1}^{\nu-1}, a_{n_2}^{\nu-1}, \ldots, a_{n_\eta p\nu-1}^{\nu-1}\}$. Algebra booleeană B_n^ν are $A_{np\nu-1}^2=(\eta^{p\nu-1})^2=\eta^{p\nu}=2^{kp\nu}$ elemente, unde $p\nu=2^\nu$; $\nu=1,2, \ldots, m$(finit). Elementele noii algebre le notăm cu

$a_{n_1}^\nu=1_n^\nu=(1_n^{\nu-1}, 0_n^{\nu-1})$ – elementul unitate

$a_{n_2}^\nu=0_n^\nu=(0_n^{\nu-1}, 1_n^{\nu-1})$ – elementul nul

. . . . . .

$a_{n_i}^\nu=(a_{nl_{\nu-1}}^{\nu-1}, a_{nk_{\nu-1}}^{\nu-1})$ – un element oarecare

$i=1,2, \ldots, \eta^{p\nu}$, $l_{\nu-1}$, $k_{\nu-1}=1,2, \ldots . \eta^{p\nu-1}$

Pentru n şi ν finiţi se verifică că şi B_n^ν este o algebră booleeană utilizînd inducţia asupra lui ν şi sistemul axiomatic propus de R. Sikorski. ($n=2,4, \ldots, 2^k$).

IV. IZOMORFISM ŞI OMOMORFISM BOOLEEAN ÎNTRE B_n° şi B_n^ν

Conform celor arătate în [2] imaginea omomorfă $h(B)$ a algebrei booleene B este o subalgebră booleeană B' a lui B, deci între algebrele booleene B_n° ($n=2,4,8, \ldots 2^k$) şi subalgebrele corespunzătoare există un omomorfism booleean. Între subalgebrele cu acelaşi număr de elemente există un izomorfism booleean·

Dacă din mulțimea perechilor de formă $(a^{\nu-1}_{n_{l\nu-1}}, a^{\nu-1}_{n_{k\nu-1}}) \in B^{\nu}_{n}$ alegem submulțimea perechilor $B^{*\nu}_{n}$ de forma $(a^{\nu-1}_{n l\nu-1}, a^{\nu-1}_{n_{l\nu-1}})$ formată cu elemente din $B^{\nu-1}_{n}$ această submulțime constituie o algebră booleeană.

Corespondența dintre $B^{\nu-1}_{n}$ și $B^{*\nu}_{n}$ este biunivocă, păstrează complementarea, reuniunea, intersecția, zerourile și unitățile deci este un izomomorfism booleean. Corespondența dintre B^{ν}_{n} și $B^{*\nu}_{n}$ este un omomorfism booleean la fel ca și corespondența dintre B^{ν}_{n} și $B^{\nu-1}_{n}$.

BIBLIOGRAFIE

(1] R. Sikorski: „*Booleean Algebas*". Berlin 1960

[2] M. Iosifescu, Gh. Mihoc, R. Teodorescu: „*Teoria probabilităților și statistica matematică*" Ed. Teh. București 1966 : pag. 59—71

[3] R. L. Goodstein, Ph. D. Lit. *Booleean Algebra.* 1963 Pergamon Press. Oxford-London-Paris-Frankfurt. The Macmillan Company. New-York

[4] Sergiu Rudeanu: „*Axiomele laticilor și ale algebrelor booleene*" Ed. Acad. R.P.R. București 1963.

[5] Gr. C. Moisil: „*Teoria algebrică a mecanismelor automate*" Ed. Teh. București 1959. Pag. 65—71.

[6] M. Kiss și St. Matei: „Algebre booleene ale perechilor de perechi. Bul. șt. și teh. al Inst. Pol. Timișoara Seria Mat.-Fizică-Mecanică-teoretică și aplicată. Tom. 15 (29) Fas. 1 ian-iunie 1970.

О КОНЕЧНЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ ПОРОЖДАЕМЫХ МНОЖЕСТВОМ ТОЧЕК

(РЕЗЮМЕ)

В настоящей работе авторы определяют эффективно некоторые булевы алгебры B к порождаемые множеством конечных точек $a_1, a_2 \ldots a$, булевы алгебры B к пар элементов получаемых из B к, а также осответствующие булевы гомоморфизмы и изоморфизмы.

UBER EINIGE ENDLICHE BOOLEANISCHE ALGEBREN DIE AUS PUNKTEMENGEN GEBILDET SIND

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit bestimmen die verfasser einige booleanische Algebren $B^{\circ}_{2^k}$, die aus den endlichen Punktemengen $\Omega_k=\{a_1,a_2, \ldots, a_k\}$ aufgebaut sind, und die booleanischen Algebren B^{ν}_{2k} der Elementenpaare, die aus $B^{\circ}_{2^k}$ erhalten werden, sowie die entsprechenden Omo-und Isomorphismen.

Buletinul şt. şi tehn. al I.P.T. Seria Mat.—Fiz.—Mec. teor. şi apl. Tom 17(31) fasc. 2/1972

SOLUŢIA CEA MAI GENERALĂ A ECUAŢIILOR FUNCŢIONALE DE TIPUL TEOREMELOR DE ADIŢIUNE

DE

M. NEAGU

1. Vom da soluţia cea mai generală a ecuaţiei funcţionale

$$f(x+y)=F[f(x),f(y)] \tag{1}$$

unde funcţia necunoscută f este definită pe mulţimea numerelor reale R şi ia valori într-o mulţime oarecare A, iar $F:A\times A\to A$ este o funcţie dată.

Vom nota

$$A_0=Imf$$

şi vom înzestra pe A_0 cu o structură de Q-modul (Q fiind mulţimea numerelor raţionale). După construcţia acestei structuri vom da soluţia cea mai generală a ecuaţiei (1) utilizînd o bază algebrică a mulţimii numerelor reale [3].

a. Oricare ar fi a_1,a_2 A_0 vom nota $F(a_1,a_2)=a_1\times a_2=\overset{2}{\underset{i=1}{X}}a$ (2) (2)

şi se observă cu uşurinţă că operaţia (2) este asociatăiv şi comutativă în A_0.

Funcţia f fiind definită în origine, se deduce că ecuaţia

$$f(0)=f(0)\times f(0)=f^{\times 2}(0) \tag{3}$$

are o soluţie în A_0.

Vom presupune că (3) nu este o identitate în A_0 şi vom nota cu $\{R_i\}_{i\in I}$ mulţimea soluţiilor ecuaţiei (3). Fie, de exemplu

$$f(0)=e_{i_0} \tag{4}$$

Mulţimea A_0 este un grup abelian G_{i_0} cu unitatea dată de (4) iar inversele fiind date de relaţia

$$f^{\times -1}(x)=f(-x) \tag{5}$$

Acest grup este complet, deoarece ecuaţia

$$u^{\times n}=v \tag{6}$$

cu necunoscuta u, n natural arbitrar dat şi $v\in G_{i_0}$ dat are soluţie în G_{i_0}. În adevăr, dacă $v=f(x)$, atunci putem lua $u=f\left(\frac{x}{n}\right)$, deoarece

$$u^{\times n}=f\left(\frac{x}{n}\right)^{\times n}=f\left(n\,\frac{x}{n}\right)=f(x)=v$$

Dar G_{i_0} nu este în general un grup fără torsiune, deoarece din

$$f(nx)=e_{i_0}$$

nu rezultă

$$x=0.$$

3. În mulțimea numerelor reale R stabilim următoarele relație de echivalență $x\sim y$ dacă există un număr natural n astfel încît $f(nx)=f(ny)$

Tranzitivitatea relației rezultă din

$$f(nx)=f(ny) \text{ și } f(my)=f(ms) \Rightarrow f(mnx)=f(mns)$$

Vom nota cu K mulțimea claselor de echivalentă și cu

$$\varphi: R\to K$$

aplicația canonică.

Deasemenea definim aplicația

$$\psi: K\to A$$

astfel încît diagrama

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & A \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\psi} & \\ & K & \end{array}$$

să fie comutativă.

Vom nota în continuare

$$X=\varphi(x),\ Y=\varphi(y), \text{ etc.}$$

K se poate organiza cu structura de Q-modul, cu operațiile

$$X+Y=\varphi(x+y)$$
$$rX=\varphi(rx)$$

unde

$$r\in Q$$

Definiția celor două operații nu depinde de alegerea reprezentanților. În adevăr, dacă

$$f(nx)=f(nx') \text{ și } f(my)=f(my')$$

atunci notînd $p=mn$, avem

$$f(px)=f(px') \text{ și } f(py)=f(py')$$

și

$$f[p(x+y)]=f(px+py)=F[f(px),\ f(py)]=F[f(px'),\ f(py')]=$$
$$=f(px'+py')=f[p(x'+y')]$$

În sfîrșit, pentru a doua operație, dacă

$$f(nx)=f(nx'), \quad \text{iar} \quad r=\frac{m}{p} \ (r>0)$$

atunci

$$f[(np)rx]=f[(np)rx']$$

Prin urmare, putem scrie

$$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(x+y)$$
$$r\varphi(x)=\varphi(rx) \qquad (r>0)$$

Elementul nul din K, se definește

$$0=\varphi(0)$$

iar simetricul lui X,

$$-X=-\varphi(x)=\varphi(-x)$$

și prin urmare dacă $r<0$

$$r\varphi(x)=-\varphi(-rx)=\varphi(rx)$$

Dacă există un număr natural n astfel încît $\psi(nX)=e_{i_0}$, atunci $X=0$.
În adevăr, în acest caz

$$\psi(nX)=\psi(n\varphi(x))=\psi(\varphi(nx))=f(nx)$$

Dar pe de altă parte

$$e_{i_0}=f(0)=f(n0)$$

de unde $x\sim 0$ și prin urmare $X=0$.

A_0 este un Q-modul G_{i_0}, față de operația (grupală)

$$\alpha_1\alpha_2=F(\alpha_1,\alpha_2,) \prod_{i=1}^{2}\alpha_i \tag{7}$$

unde

$$\alpha_1=\psi(X_1), \ \alpha_2=\psi(X_2), \ X_1,X_2\in K$$

În adevăr, scriind (1) sub forma

$$\psi(X+Y)=F[\psi(X), \ \psi(Y)] \tag{8}$$

operația asociativă și comutativă (7) are elementul nul

$$e_{i_0}=\psi(0) \tag{9}$$

inversele calculîndu-se după legea

$$\psi^{-1}(X)=\psi(-X) \tag{10}$$

Grupul G_{i_0} este complet și fără torsiune după propoziția 2, deci este un Q-modul

Avem astfel

$$r\psi(X)=\psi(rX),\ r\in Q \tag{11}$$

4. Fie H o bază algebrică a lui R.

Oricare ar fi $x\in R$, el se exprimă unic sub forma

$$x=\sum_{i=1}^{n} r_i b_i \tag{12}$$

unde $b_i\in H$ și $r_i\in Q$.

Evident, luînd un număr finit de numere reale, le putem exprima în mod unic sub o formă (12) cu aceleași elemente $b_i\in H$, în număr finit (luînd unii coeficienți nuli, eventual).

De exemplu, putem lua pentru un alt $y\in R$, exprimarea (unică)

$$y=\sum_{i=1}^{n} r'_i b_i \tag{13}$$

cu aceleași $b_i\in H$ ca și în (12), iar $r'_i\in Q$.

Teorema 1.

Soluția cea mai generală S a unei ecuații funcționale (1) în care (3) nu este o identitate este dată de următoarea construcție:

1. $f(b_i)\in G_{i_0}$, altfel arbitrar, oricare ar fi $b_i\in H$.
2. Dacă $x\notin H$, deci admite o reprezentare netrivială sub forma (12)

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n} r_i\psi(B_i)$$

unde

$$B_i=\psi(b_i)$$

În adevăr, oricare ar fi $x,y\notin H$, exprimați sub formele (unice) (12) și (13), avem

$$f(x)=\psi(\varphi(x))=\psi(\varphi(\sum_{i=1}^{n} r_i b_i))=\psi(\sum_{i=1}^{n} r_i\varphi(b_i))=\psi(\sum_{i=1}^{n} r_i B_i)=\prod_{i=1}^{n} r_i\psi(B_i)$$

iar

$$f(x+y)=\psi(\varphi(x+y))=\psi(\varphi(\sum_{i=1}^{n}(r_i+r'_i)b_i))=\prod_{i=1}^{n}(r_i+r'_i)\psi(B_i)=\prod_{i=1}^{n} r_i\psi(B_i)\prod_{i=1}^{n} r'_i\psi(B_i)=$$

$$=F[\psi(\varphi(x),\psi)\varphi(y))]=F[f(x),f(y)]$$

Ecuația (1) fiind și verificată, teorema este demonstrată

Teorema 2.

Dacă A_0 este un grup finit G_{i_0}, atunci soluția cea mai generală a ecuației (1), este

$$f(x)=e_{i_0} \tag{14}$$

În adevăr, în acest caz R are un singur element și anume pe $0=\varphi(0)$, deoarece oricare ar fi $x\in R$, G_{i_0} fiind finit, există un număr natural n, astfel încît

$$f(nx)=e_{i_0}$$

Prin urmare $K=\{0\}$, iar $f(x)=\psi(\varphi(x))=\psi(0)=e_{i_0}$

5. OBSERVAȚII:

a) Dacă $A_0\neq A$, atunci

$$f=\chi(\psi(\varphi))$$

unde χ este injecția canonică a lui A_0 în A.

b) Ca un caz particular al generalizării operației aditive din R pentru ecuația (1) să considerăm ecuația funcțională

$$f(x+y+xy)=f(x)+f(y) \tag{15}$$

unde funcția necunoscută $f: I=(-1,+\infty)\to R$

I este un grup abelian cu operația $x\oplus y=x+y+xy$ (16)

și spațiu vectorial peste Q, punînd

$$rx=-1+(1+x)^r \tag{17}$$

Pentru ecuația (15) care se poate scrie și sub forma

$$f(x\oplus y)=f(x)+f(y)$$

avem

$$f(0)=0$$

iar

$$F(a_1,a_2)=a_1+a_2$$

Fie H_I o bază algebrică a lui I. Oricare ar fi $x\in I$, el se poate scrie unic sub forma

$$x=\bigoplus_{i=1}^{n} r_i b_i=(1+b_1)^{r_1}(1+b_2)^{r_2}\ldots(1+b_n)^{r_n}-1 \tag{18}$$

unde

$$b_i\in H_I,$$

iar

$$r_i\in Q.$$

Soluția cea mai generală a ecuației (15) este dată de următoarea construcție :

1. $f(b_i) \in R$, altfel arbitrar, oricare ar fi $b_i \in H_I$.

2. Pentru orice $x \in I / H_I$, dat de exprimarea nebanală (18)

$$f(x)=r_1 f(b_1)+r_2 f(b_2)+ \ldots +r_n f(b_n) \tag{19}$$

Soluția generală continuă [1] a lui (15) este

$$g(x)=Cln(1+x) \tag{20}$$

unde C este o constantă reală arbitrară.

Dacă se ia

$$f(b) \neq g(b) \tag{21}$$

pentru $b \in H_I$, vom obține din soluțiile (19) soluții discontinue pentru ecuația (15)

c) În cazul în care A_0 poate fi unul din mai multe grupuri G_i, forma lui f în aceste grupuri G_i este în general mai particulară :

$$f(x)=f(x)e_i \tag{22}$$

unde $e_i \in G_i$, unitatea grupului G_i.

De exemplu, pentru f: $R \to \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in R$, cu alte cuvinte

$$f=\begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ \psi & \varphi \end{pmatrix}$$

unde φ și ψ sînt funcții reale, care satisface ecuația funcțională

$$f(x+y)=f(x)f(y) \tag{23}$$

unde operația F este aici multiplicarea matricelor pătrate [2, 2], ecuația (3) dă soluțiile :

$$e_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad e_4=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dacă $A_0=G_2$, atunci

$$f(x) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dacă, $A_0=G_3$, atunci

$$f(x)=\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_1(x) \\ \varphi_1(x) & \varphi_1(x) \end{pmatrix}$$

iar dacă $A_0=G_4$, atunci

$$f(x)=\begin{pmatrix} \varphi_2(x) & -\varphi_2(x) \\ -\varphi_2(x) & \varphi_2(x) \end{pmatrix}$$

BIBLIOGRAFIE

[1] I. Aczel: „*Functional equations and their applications*", Academic Press, New-York, 1966
[2] A. L. Cauchy: „*Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*", Paris, 1821.
[3] G. Hamel: „Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$", Math. Ann. 60, 459—462.

САМОЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА АДДИЦИОННЫХ ТЕОРЕМ

(РЕЗЮМЕ)

В настоящей работе даётся самое общее решение функционального уравнения $f(x+y)=F[f(x), f(y)]$ где незнакомая функция f определёна на R, принимает значення в некотором множестве A, а $F: A\times A\to A$ заданная функция, пользуясь алгебрический базис множества R и наделив

$$A_0=Imf$$

алгебрической структурой Q — модуля.

LA SOLUTION LA PLUS GÉNÉRALE DE L'ECUATION FONNCTIONELLE DU TYPE DES THÉORÉMES D'ADDITION

(RÈSUMÈ)

Dans ce travail on donne la solution la plus générale de l'équation fonctionnelle

$$f(x+y)=F[f(x),f(y)]$$

où la fonction inconnue f est définie sur R et prend les valeus dans un ensemble quelconque A, et $F:AxA\to A$ est une fonction donnés, en utilisant une base algébrique de R et en donant

$$A_0=Imf$$

d'une structure algébrique du Q-module.

Buletinul şt. şi tehn. al I.P.T. Seria Mat.—Fiz.—Mec. teor. şi apl. Tom 17(31) fasc. 2/1972

O FORMULĂ GENERALĂ PENTRU CALCULUL UNOR INTEGRALE DEFINITE

DE

Gh. TUDOR

I. În [1] şi [2], folosind funcţiile de variabilă complexă

$$f_1(z)=\frac{e^{i(az^2+bz)}}{z}\cdot\frac{cz^2+d}{\alpha z^2+\beta} \tag{1}$$

respectiv

$$f_2(z)=\frac{e^{iP(z)}}{z}\cdot\frac{Q(z)}{\alpha z^{2p}+\beta} \tag{2}$$

unde

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-2}z+a_{n-1}z$$

$$Q(z)=b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_{m-1}z+b_m$$

au fost stabilite, cu ajutorul teoremei rezidurilor, formule pentru calculul unor clase de integrale improprii. Aceste formule conţin mai mulţi parametri, iar prin particularizarea acestora se obţine un număr mare de integrale improprii, printre care unele clasice.

II. În lucrarea de faţă, vom generaliza rezultatele din [1] şi [2]. Pentru aceasta, să dăm în prealabil o teoremă, cu condiţii oarecum restrictive, pentru a putea aplica direct la funcţia care ne interesează.

TEOREMA **Fie o funcţie de variabilă complexă $W=f(z)$ uniformă şi avînd ca singularităţi un număr finit de poli sau puncte singulare esenţiale p_k la o distanţă finită, în domeniul**

$$D:\ \alpha<\arg z<\beta \qquad (0\leqq\alpha,\ \beta\leqq 2\pi)$$

punctul $z=0$ fiind punct ordinar pentru $f(z)$. Mai presupunem că există un număr întreg m şi un număr complex $z_0\neq 0$, astfel încît

$$\lim_{|z|\to\infty}|z^{-m}f(z)|=\lim_{|z|\to\infty}|z^{-m+1}f'(z)-z_0f(z)|=0 \qquad (\alpha<\arg z<\beta) \tag{3}$$

În aceste condiții este adevărată formula

$$\int_0^{\infty} \frac{f(xe^{i\alpha})-f(xe^{i\beta})}{x}\,dx=2\pi i\sum_{\alpha<\arg p_k<\beta}\operatorname{rez}\left[\frac{f(z)}{z}\right]-if(0)\,(\alpha-\beta) \tag{4}$$

Pentru demonstrație, să considerăm domeniul Δ din figura alăturată, în care am ales numerele $\varepsilon>0$, $r>0$ astfel ca $\varepsilon<|p_k|<r$, $k=1,2,\ldots n$, iar $f(z)$ să fie olomorfă în interiorul cercului $|z|=\varepsilon$.

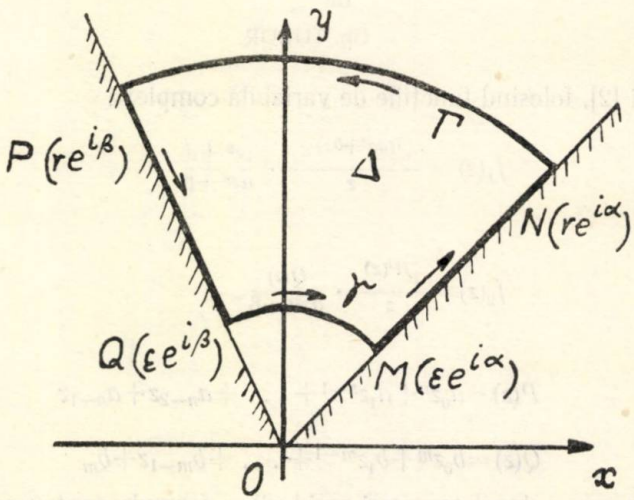


Fig. 1.

Integrăm funcția $\frac{f(z)}{z}$, în care $f(z)$ satisface condițiile teoremei, pe conturul închis care mărginește pe Δ, și avem

$$\int_C \frac{f(z)}{z}\,dz=2\pi i\sum_k \operatorname{rez}\left[\frac{f(z)}{z}\right] \tag{5}$$

suma reziduriloor fiind extinsă la polii lui $f(z)$, pentru care $\alpha<\arg p_k<\beta$, $k=1,\ldots n$ Formula (5) se mai scrie

$$\int_{\varepsilon}^{r}\frac{f(\rho e^{i\alpha})}{\rho}\,d\rho+\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z}\,dz+\int_{r}^{\varepsilon}\frac{f(\rho e^{i\beta})}{\rho}\,d\rho+\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z}\,dz=2\pi i\sum_k\operatorname{rez}\left[\frac{f(z)}{z}\right] \tag{6}$$

Trecem la limită în relația (6) cu $\varepsilon\to 0$ și $r\to\infty$ și să vedem ce se întîmplă cu integralele pe γ și Γ.

Pentru $\int_\Gamma \frac{f(z)}{z}dz$, integrăm pe Γ identitatea

$$(z^{-m}f(z)'=z^{-m}f'(z)-mz^{-m-1}f(z)$$

scriind-o mai întîi sub forma

$$(z^{-m}f(z))'=\left(z^{-m}f'(z)-z_0\frac{f(z)}{z}\right)-mz^{-m-1}f(z)+z_0\frac{f(z)}{z}$$

Obţinem:

$$z^{-m}f(z)\Big|_{re^{i\alpha}}^{re^{i\beta}}=\int_\Gamma\left(z^{-m}f'(z)-z_0\frac{f(z)}{z}\right)dz-m\int_\Gamma z^{-m-1}f(z)dz+z_0\int_\Gamma\frac{f(z)}{z}dz \qquad (7)$$

Făcînd în această relaţie $r\to\infty$, primele două integrale din membrul drept tind la 0, deoarece

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|z\left(z^{-m}f'(z)-z_0\frac{f(z)}{z}\right)\right|=\lim_{|z|\to\infty}|z^{-m+1}f'(z)-z_0f(z)|=0$$

şi

$$\lim_{|z|\to\infty}|z\,(z^{-m-1}f(z))|=\lim_{|z|\to\infty}|z^{-m}f(z)|=0$$

Deasemeni, termenul integrant tinde la 0 cînd $r\to\infty$.
Prin urmare

$$\lim_{r\to\infty}\int_\Gamma\frac{f(z)}{z}dz=0 \qquad (8)$$

Pentru integrala pe γ, considerăm seria Laurent a funcţiei $\frac{f(z)}{z}$, într-o coroană centrată în origine

$$\frac{f(z)}{z}=\frac{C_{-1}}{z}+C_0+C_1z+\ldots+C_kz^k+\ldots \qquad (9)$$

unde

$$C_{-1}=\lim_{z\to0}f(z)=f(0)$$

Integrăm relaţia (9) pe γ şi obţinem

$$\int_\gamma\frac{f(z)}{z}dz=C_{-1}\int_\gamma\frac{dz}{z}+i\sum_{k=0}^{\infty}C_k\varepsilon^{k+1}\int_\beta^\alpha e^{i(k+1)\varphi}d\varphi \qquad (10)$$

Ţinînd seama că

$$\int_\gamma\frac{dz}{z}=\int_\beta^\alpha\frac{\varepsilon ie^{i\varphi}d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}}=i(\alpha-\beta)$$

şi făcînd $\varepsilon \to 0$ în (10), obţinem

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz = if(0)\ (\alpha - \beta) \tag{11}$$

După trecerile la limită, relaţia (6) devine :

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\rho e^{i\alpha})}{\rho} d\rho + \int_{\infty}^{0} \frac{f(\rho e^{i\beta})}{\rho} d\rho + if(0)\ (\alpha - \beta) = 2\pi i \sum_{\alpha < \arg r_k < \beta} \operatorname{rez} \left[\frac{f(z)}{z}\right] \tag{12}$$

sau, punînd $\rho = x$, obţinem în definitiv

$$\int_0^{\infty} \frac{f(xe^{i\alpha}) - f(xe^{i\beta})}{x} dx = 2\pi i \sum_{k} \operatorname{rez} \left[\frac{f(z)}{z}\right] - if(0)\ (\alpha - \beta) \tag{13}$$

III. Să considerăm acum funcţia de variabilă complexă

$$f(z) = e^{iP(z)} \cdot R(z) \tag{14}$$

în care

$$P(z) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k z^k,\ R(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n}{b_0 z^p + b_1 z^{p-1} + \ldots + b_{p-1} z + b_p}$$

iar

$$n \leqq p,\ \lambda_k \geqslant 0,\ k = 1, 2, \ldots m,\ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \neq 0$$

şi considerăm domeniul

$$D :\ \alpha < \arg z < \beta \qquad \left(\alpha \geqslant 0,\ \beta \leqq \frac{\pi}{m}\right)$$

Presupunem că rădăcinile numitorului lui $R(z)$ au argumentele diferite de α şi β.

Se verifică imediat că $\lim_{|z| \to \infty} R(z) < \infty$ şi $\lim_{|z| \to \infty} |R'(z)| = 0$

şi

$$|e^{iP(z)}| = e^{-\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sin k\varphi} < 1, \text{ pentru } \alpha < \varphi < \beta = \frac{\pi}{m}$$

Ţinînd seamă de aceste observaţii, făcînd un calcul elementar se verifică uşor condiţiile

$$\lim_{|z| \to \infty} |z^{-m} f(z)| = 0 \text{ şi } \lim_{|z| \to \infty} |z^{-m+1} f'(z) - im \leftarrow im \lambda_m f(z)| = 0$$

Prin urmare, $f(z)$ verifică condiţiile teoremei demonstrate anterior, şi aplicînd formula (4), obţinem :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{iP(xe^{i\alpha})} - e^{iP(xe^{i\beta})}}{x} R(x) dx = 2\pi i \sum \operatorname{rez} \left[\frac{e^{iP(z)}}{z} R(z)\right] - i \frac{a_n}{b_p} (\beta - \alpha) \tag{15}$$

în care notăm $P(xe^{i\alpha})=\varphi(x,\alpha)+i\psi(x,\alpha)$, iar membrul drept îl scriem sub forma $A+iB$. Separînd părţile reale şi imaginare în (15), se obţin formulele generale:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\psi(x,\alpha)}\cos\varphi(x,\alpha)-e^{-\psi(x,\beta)}\cos\varphi(x,\beta)}{x}\cdot R(x)dx=A$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\psi(x,\alpha)}\sin\varphi(x,\alpha)-e^{-\psi(x,\beta)}\sin\varphi(x,\beta)}{x}\cdot R(x)dx=B \qquad (16)$$

Aceste formule generalizează rezultatele obţinute în [1] şi [2].

BIBLIOGRAFIE

[1] Gh. Tudor: „Calculul unor integrale improproprii cu teorema rezidurilor" Bul. St. şi Tehnic, I.P.T., Tom. 12 (26), 1967 pag. 403—407.

[2] Gh. Tudor: Două formule generale pentru calculul unor integrale improprii", Bul. St. şi Tehnic, I.P.T., Tom. 14 (28), 1969. pag. 73—77.

ОДНА ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(РЕЗЮМЕ)

В настаящей заметке автор даёт одну теорему которая ему позваляет извлечь значения некоторых определённых интегралов.

UNE FORMULE GÉNÉRALE POUR LE CALCUL DES CERTAINES INTÈGRALES DEFINIES

(RÈSUMÈ)

Dans le prèsent travail l'auteur établie un théorème qui lui permet d'en tirer les valeurs des certaines intégrales définies.

Buletinul şt. şi tehn. al I.P.T. Seria Mat.—Fiz.—Mec. teor. şi apl. Tom 17(31) fasc. 2/1972

SPACE TIME AND MASS

BY

M. BORNEAS

In order to explain the possibility of a particle to have a velocity higher than the light in vacuum Bilaniuk, Deshpande and Sudarshan [1] assumed an imaginary rest mass for such a particle. What physical meaning can be unravelled under this conception ? Let us try an approach of the problem in the following way.

In an Euclidian hyperspace with n dimensions we can write the invariant element of „length"

$$ds^2=\sum_\nu dx_\nu^2. \tag{1}$$

For a free particle in this hyperspace the action may be written [2]

$$S=\alpha\int_1^2 ds=\int_1^2 dt\alpha\frac{ds}{dt} \tag{2}$$

wherefrom the Lagrange function is seen to be

$$L=\alpha\frac{ds}{dt}=\alpha\sqrt{\sum_\nu\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)^2}=\alpha\sqrt{\sum_\nu\dot{x}_\nu^2}. \tag{3}$$

We can calculate the components of the generalized momentum

$$P_\nu=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_\nu}=\frac{\alpha\dot{x}_\nu}{\sqrt{\sum_\nu\dot{x}_\nu^2}}. \tag{4}$$

Consider the relativity space-time being part of the n-dimensional hyperspace, thus

$$\begin{cases} x_1=x \\ x_2=y \\ x_3=z \\ x_4=ict. \end{cases} \tag{5}$$

Then, choosing the motion along the Ox axis, the space component of the momentum will be

$$P_1=p=\frac{\alpha v}{\sqrt{v^2-c^2+\sum_\omega \dot{x}_\omega^2}}=\frac{\alpha v}{ic\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{c^2}\sum_\omega \dot{x}_\omega^2}} \tag{6}$$

where $\omega=5,6,\ldots$ Because p must reduce to the relativistic momentum for $x_\omega=0$, it results $\alpha=icm$ and accordingly

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{a^2}{c^2}}} \tag{7}$$

where notation

$$a^2=\sum \dot{x}_\omega^2 \tag{8}$$

has been made. The time component is

$$p_4=\frac{icm\frac{d\,ict}{dt}}{ic\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{a^2}{c^2}}}=\frac{imc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{a^2}{c^2}}} \tag{9}$$

and we can write the energy

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{a^2}{c^2}}}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2-v^2}}} \tag{10}$$

which goes into relativistic form for $a=0$.

Suppose we have a particle with $v>c$, a so called tachyon [3], which allows to write Eq. (10) as folows

$$E=\frac{mc^2}{i\sqrt{\frac{v^2}{c^2}-1}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{v^2-c^2}}}. \tag{11}$$

Comparing to the energy expression given by [3]

$$E=\frac{i\mu c^2}{i\sqrt{\frac{v^2}{c^2}-1}} \tag{12}$$

we obtain

$$i\mu = \frac{m}{\sqrt{1+\frac{a^2}{v^2-c^2}}} = i\frac{m}{i\sqrt{+1\frac{a^2}{v^2-c^2}}} \tag{13}$$

$$= i\frac{m}{\sqrt{-1-\frac{a^2}{v^2-c^2}}}.$$

If a is negative and fulfils the condition

$$|a^2| > |v^2-c^2| \tag{14}$$

then, evidently the energy remains real, but the quantity (13) is imaginary; this is what B i l a n i n k [1] names imaginary mass.

Keeping in view (8) and retaining the metacoordinate x_5 only, we can write the energy

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}_5^2}{c^2-v^2}}}. \tag{15}$$

From above one can see that for $v<c$ the metacoordinate x_5 of the particle must be constant, or nearly constant, and for $v>c$ it must be imaginary

$$x_5 = iqX \tag{16}$$

so that

$$q\dot{X} > |\sqrt{v^2-c^2}|. \tag{17}$$

Let us write the interval ds in the form

$$ds^2 = \sum_j dx_j^2 - c^2dt^2 + dx_5^2 \qquad (j=1,2,3). \tag{18}$$

For an inertial frame moving with the the particle we have

$$ds^2 \equiv ds^{02} = -c^2dt^{02} + dx_5^{02}$$

or

$$\sum_j dx_j^2 - c^2dt^2 + dx_5^2 = -c^2dt^{02} + dx_5^{02}$$

wherefrom results the equation for proper time interval

$$dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{dx_5^2}{c^2dt^2}} = dt^\circ\sqrt{1-\frac{dx_5^2}{c^2dt^{\circ 2}}}. \tag{19}$$

It is interesting to remark that if we choose $\dot{x}_5$ proportional to v a simple interpretation can be obtained as follows. We have

$$\dot{x}_5 = \frac{dx_5}{dt} = i\varepsilon v \tag{20}$$

wherefrom

$$dx_5 = i\varepsilon v dt. \tag{21}$$

In this case (1) becomes

$$ds^2 = \sum dx_j^2 - c^2 dt^2 - \varepsilon^2 v^2 dt^2 = \sum dx_j^2 - \left(1 + \varepsilon^2 \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 dt^2. \tag{22}$$

This expression represents the metric of a space containing a gravitational field of constant potential

$$U = -\frac{\varepsilon^2 v^2}{2} \tag{23}$$

(v is constant, the motion being uniform). The study of this problem can be performed in a way similar to that of K a r l o v [4].

REFERENCES

[1] O. B i l a n i u k, V. D e s h p a n d e and E. S u d a r s h a n, Am J. Phs. 30, 718 (1962).
[2] L. L a n d a u and E. L i f s h i t z, *Teoria cîmpului*, translation from russian (Editura tehnică, Bucureşti 1963).
[3] G. F e i n b e r g, Phys. Rev. 159, 1089 (1967).
[4] L. K a r l o v, Am J. Phys. 37 1283 (1969).

ПРОСТРАНСТВО ВРЕМЯ И МАССА

(РЕЗЮМЕ)

В работе делается попытка объяснить физический смысл мнимой массы покоя. Считая что пространство-время, с точки зрения относительности, является частью эвклидового гиперпространства, выводится специальная форма энергии. Сопоставляя ее с энергией тахионов, приводятся условия которые должна соблюдать пятая координата. Выводится промежуток собственного времени.

SPACE TIME AND MASS

(SUMMARY)

An approach to the physical meaning of the imaginary rest mass is attempted. Considering the relativity space-time being part of an Euclidian hyperspace, a special form of the energy is deduced. Comparing with the energy of the tachyons, the conditions are given which must be fulfilled by the fifth coordinate. The proper time interval is deduced.

Buletinul şt. şi tehn. al I.P.T. Seria Mat.—Fiz.—Mec. teor. şi apl. Tom 17(31) fasc. 2/1972

STUDIUL MIŞCĂRII SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE CU AJUTORUL ECUAŢIILOR LUI LAGRANGE

DE

Gh. SILAŞ, L. BRÎNDEU

Caracteristica principală a oricărui sistem vibropercutant este prezenţa unor cuple percutante ce se pot pune în evidenţă analitic cu ajutorul legăturilor unilaterale [1]. Deoarece obişnuit interacţiunile percutante se manifestă între două corpuri care se întîlnesc în timpul mişcării, legătura unilaterală se obţine simplu din condiţii geometrice.

Există sisteme mecanice vibropercutante complexe formate din mai multe corpuri supuse şi la alte legături. În astfel de cazuri studiul ciocnirii se face prin separarea corpurilor şi aplicarea legilor percuţiilor pentru fiecare corp supus acţiunii percuţiilor exterioare şi de legătură.

Aplicînd metoda ecuaţiilor lui Lagrange [2], [3] percuţiile de legătură se elimină de la început şi problema ciocnirii se poate rezolva mai simplu. Ecuaţiile lui Lagrange în cazul ciocnirii se transformă în ecuaţii algebrice din care cu ajutorul coeficientului de restituire R se determină vitezele de la sfîrşitul ciocnirii. Această metodă nouă în studiul sistemelor vibropercutante, reprezintă o schemă unitară şi generală de tratare a oricărei probleme de vibropercuţii.

Studiul mişcării se face în ipoteza că sistemul conţine o singură cuplă percutantă. Metoda se poate însă generaliza şi pentru sistemele cu mai multe cuple percutante în care ciocnirile au loc succesiv.

FUNCŢIA LEGĂTURII UNILATERALE

Se consideră un sistem mecanic vibropercutant cu n grade de libertate, a cărui poziţie este determinată prin coordonatele generalizate q_i $(i=1,2, \ldots, n)$ Apariţia percuţiilor în decursul mişcării sistemului este echivalentă cu existenţa unei legături unilaterale la care este supus sistemul, de forma

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \geqslant 0 \tag{1}$$

În cazul valabilităţii inegalităţii (1) sistemul se mişcă liber. Ţinînd seama de condiţiile iniţiale se obţin legile mişcării $q_i = q_i(t)$, $(i=1,2, \ldots, n)$ pentru fiecare interval de timp dintre două momente succesive ce verifică egalitatea (1).

Dacă se înlocuiesc legile mișcării astfel stabilite în funcția f se obține:

$$f = f[q_1(t), q_2(t) \ldots, q_n(t), t] \tag{2}$$

care este o funcție numai de timp, continuă. Ea este și derivabilă cu excepția extremităților.

Cele două momente succesive ce verifică egalitatea (1) se obțin rezolvînd ecuația

$$f = f[q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t), t] = 0 \tag{3}$$

În fiecare din aceste momente în sistem pot să aibă loc percuții. Conform relației (1) aici funcția considerată are cele mai mici valori care sînt egale cu zero. Mai jos se vor pune în evidență cîteva proprietăți mai importante ale funcției în vecinătatea unuia din aceste momente și interpretările corespunzătoare.

Fie $t = \tau_0$ rădăcina ecuației (3), ce corespunde sfîrșitului intervalului. Pentru ca funcția să aibă în acest moment valoarea zero este necesar ca într-o vecinătate la stînga ($t \leqslant \tau_0$) funcția să fie descrescătoare. Astfel derivata la stînga a funcției f, pentru $t = \tau_0$, va satisface condiția

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_0 \leqslant 0 \tag{4}$$

Fie τ_1 momentul infinit apropiat de τ_0 cînd percuția s-a terminat. Într-o vecinătate la dreapta ($t > \tau_1$) funcția nu poate să descrească, ceea ce înseamnă că derivata nu poate fi negativă. Deci derivata la dreapta a funcției f, pentru $t = \tau_1$, va satisface condiția

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_1 \geqslant 0 \tag{5}$$

Indicii 0 și 1 arată că se consideră derivatele amintite mai sus, la stînga, respectiv la dreapta.

Condiția (4) se stabilește cu ajutorul legilor mișcării din intervalul considerat. Condiția (5) depinde de condițiile în care se realizează percuțiile și de natura elementelor componente ale sistemului. Vom considera mai jos cazurile ce pot să apară și interpretarea fizică pentru fiecare din ele.

a. Se consideră în primul rînd că este valabilă inegalitatea (4). În acest caz are loc o ciocnire între sistem și legătură, vitezele generalizate variază brusc. În practică, cel mai des se realizează inegalitatea și nu egalitatea (4). Rezultă că în mod obișnuit între sistem și legătură apar ciocniri. Condiția ca să se realizeze ciocniri este ca să existe soluții ale ecuațiilor (3) pentru care să fie verificată inegalitatea (4).

Inegalitatea (4) reprezintă condiția pe care trebuie să o verifice vitezele generalizate la momentul $t = \tau_0$ pentru a exista ciocnire. Accelerațiile generalizate nu sînt supuse la nici o condiție.

Dacă după ciocnire este îndeplinită inegalitatea (5) sistemul părăsește legătura. Astfel contactul dintre sistem și legătură este instantaneu. Funcția f în momentul ciocnirii are un punct unghiular cu derivatele laterale diferite.

Să presupunem acum că este verificată egalitatea (5) Dacă la momentul $t=\tau_1$ prima derivată la dreapta diferită de zero a funcției f este cea de ordinul s, deoarece funcția f nu poate să descrească într-o vecinătate la dreapta ($t\geqslant\tau_1$), rezultă

$$\left(\frac{d^s f}{dt^s}\right)_1 > 0 \tag{6}$$

În acest caz sistemul părăsește legătura și contactul este de asemenea instantaneu. Dacă toate derivatele la dreapta ale funcției f în momentul $t=\tau_1$ sînt nule, atunci sistemul continuă să se miște pe legătură un timp finit, contactul nu mai este instantaneu.

b. Se consideră acum că este valabilă egalitatea (4). Mișcarea liberă a sistemului se face astfel încît ajunge pe legătură fără ciocnire, vitezele generalizate nu variază brusc, își păstrează continuitatea. Din cauza acestei continuități și derivata la dreapta va fi nulă, adică $\left(\frac{df}{dt}\right)_1 = 0$, deci este valabilă egalitatea (5). Astfel dacă există o derivată la dreapta de ordin superior diferită de zero, sistemul părăsește legătura, iar dacă toate derivatele la dreapta sînt nule, sistemul continuă să se miște pe legătură un timp finit.

Să presupunem că toate derivatele la stînga ale funcției f pînă la ordinul $s-1$, sînt nule în momentul $t=\tau_0$, adică

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right)_0 = \ldots = \left(\frac{d^{s-1} f}{dt^{s-1}}\right) = 0 \tag{7}$$

Sistemul ajunge pe legătură fără ciocnire, nu variază brusc nici vitezele generalizate și nici accelerațiile generalizate pînă la inclusiv ordinul $s-2$. În ce privește derivata la stînga de ordinul s vom avea

$$\left(\frac{d^s f}{dt^s}\right)_0 > 0 \qquad \text{pentru } s \text{ par} \tag{8}$$

și

$$\left(\frac{d^s f}{dt^s}\right)_0 < 0 \qquad \text{pentru } s \text{ impar} \tag{9}$$

În oricare dintre aceste situații accelerațiile de ordinul $s-1$ variază brusc. Este cazul ciocnirilor pentru accelerațiile de ordinul $s-1$.

Din cauza continuității vitezelor și accelerațiilor pînă la ordinul $s-2$, vor fi nule toate derivatele la dreapta ale funcției pînă la ordinul $s-1$, în momentul $t=\tau_1$, adică

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right)_1 = \ldots = \left(\frac{d^{s-1} f}{dt^{s-1}}\right)_1 = 0 \tag{10}$$

Dacă există o derivată la dreapta de ordin superior lui $s-1$ diferită de zero, sistemul părăsește legătura, iar dacă toate derivatele la dreapta sînt nule, sistemul continuă să se miște pe legătură un timp finit.

În cazul că toate derivatele la stînga sînt nule nu variază brusc nici vitezele și nici una dintre accelerații. Rezultă că toate derivatele la dreapta sînt nule. În acest caz nu există nici un fenomen de ciocnire. Sistemul se găsește mereu pe legătură.

STUDIUL CIOCNIRII SISTEMULUI VIBROPERCUTANT

Presupunînd verificată inegalitatea (4) cînd au loc ciocniri și se va determina cantitativ variația vitezelor generalizate ale sistemului în interval de timp foarte scurt, (τ_0, τ_1) al unei ciocniri. Ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului în intervalul dintre două ciocniri succesive se obțin scriind ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} = Q_i \; ; \; (i=1,2, \ldots, n) \tag{11}$$

unde E_c este energia cinetică a sistemului, iar Q_i forțele generalizate. Energia cinetică este o formă patratică în vitezele generalizate, definită pozitiv și are expresia :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{12}$$

unde a_{ij} depind de coordonatele generalizate.

Se va admite că și în intervalul (τ_0, τ_1) cînd are loc ciocnirea, sînt valabile ecuațiile lui Lagrange. Vom presupune în plus, așa cum se face obișnuit, că în timpul ciocnirii forțele obișnuite se pot neglija și că poziția sistemului și legătura rămîn neschimbate. Cum în acest interval sistemul se află pe legătură, se vor folosi ecuațiile lui Lagrange cu multiplicatorul λ al legăturii. Astfel se obține

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} = Q_i + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_0 \tag{13}$$

Derivatele parțiale ale lui f notate cu indicele 0 se calculează pentru $t=\tau_0$, deoarece conform ipotezelor făcute poziția sistemului și legătura nu se modifică în intervalul scurt al ciocnirii.

În cazul ciocnirilor va fi verificată inegalitatea (4) și relația (5), adică

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_0 < 0 \; ; \quad \left(\frac{df}{dt}\right)_1 \geqslant 0 \tag{14}$$

Deoarece se consideră că vitezele generalizate au o variație continuă în intervalul ciocnirii, rezultă că există un moment intermediar $t=\tau_2 (\tau_0 < \tau_2 < \tau_1)$ pentru care se poate scrie

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_2 = 0 \tag{15}$$

Indicele 2 arată că derivata se calculează pentru $t=\tau_2$. Acest moment intermediar împarte intervalul ciocnirii în două faze. În cazul ciocnirii a două sfere' acestea sînt fazele de deformare și de relaxare.

Ținînd seama de ipotezele admise în studiul ciocnirii, derivata funcției f în raport cu timpul pentru un moment arbitrar din intervalul (τ_0, τ_1) este

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)_0 \dot{q}_j + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 \tag{16}$$

În felul acesta derivatele din (14) și (15) devin:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_0 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)_0 \dot{q}_j(\tau_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0; \quad \left(\frac{df}{dt}\right)_1 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)_0 \dot{q}_j(\tau_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0$$

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)_0 \dot{q}_j(\tau_2) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 \tag{17}$$

Se va considera la început prima fază a ciocnirii. Prin integrarea ecuației (13) ținînd seama de ipotezele admise se obține.

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right)_2 - \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right)_0 = \mu_{02} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_0 \tag{18}$$

unde $\mu_{02} = \int_{\tau_0}^{\tau_2} \lambda(t)dt$ este multiplicatorul de impuls. Cu expresia (12) a energiei cinetice în care coeficienții a_{ij} se pot considera constanți în intervalul ciocnirii ecuațiile (18) devin

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}[\dot{q}_j(\tau_2) - \dot{q}_j(\tau_0)] = \mu_{02} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_0; \quad (i = 1,2, \ldots n) \tag{19}$$

Din relațiile (17) mai rezultă

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)_0 [\dot{q}_j(\tau_2) - \dot{q}_j(\tau_0)] = \left(\frac{df}{dt}\right)_0 \tag{20}$$

Vom nota $A = |a_{ij}|$ $(i,j = 1,2 \ldots n)$ determinantul coeficienților formei patratice (12), A_j determinantul ce se obține înlocuind coloana j din A prin $\frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{\partial f}{\partial q_2}, \ldots$ $\ldots, \frac{\partial f}{\partial q_n}$, iar B determinantul ce se formează din A prin adăugarea unei linii și a unei coloane formate din aceleași elemente $\frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{\partial f}{\partial q_2}, , , \ldots \frac{\partial f}{\partial q_n}$ și 0.

Ecuațiile (19) și (20) constituie un sistem de $n+1$ ecuații algebrice liniare cu necunoscutele $\dot{q}_j(\tau_2) - \dot{q}_j(\tau_0)$ $(j = 1,2 \ldots, n)$ și μ_{02}, de asemenea în număr de $n+1$. Rezolvînd acest sistem se obțin variațiile vitezelor generalizate

$$\dot{q}_j(\tau_2) - \dot{q}_j(\tau_0) = \frac{A_{j0}}{B_0} \left(\frac{df}{dt}\right)_0 \tag{21}$$

și multiplicatorul de impuls

$$\mu_{02} = \frac{A_0}{B_0}\left(\frac{df}{dt}\right)_0 \tag{22}$$

Indicele 0 arată că valoarea se calculează pentru $t=\tau_0$.

În a doua fază a ciocnirii vom proceda în mod analog. Notînd prin $\mu_{21}= \int_{\tau_2}^{\tau_1}\lambda(t)dt$ multiplicatorul de impuls, din ecuațiile (13) se obține

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right)_1 - \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right)_2 = \mu_{21}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_0;\ (i=1,2,\ldots,n) \tag{23}$$

sau

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}[\dot{q}_j(\tau_1)-\dot{q}_j(\tau_2)] = \mu_{21}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_0;\ (i=1,2,\ldots,n) \tag{24}$$

Dacă la aceste ecuații se mai adaugă una obținută din relațiile (17) și anume

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_0 [\dot{q}_j(\tau_1)-\dot{q}_j(\tau_2)] = \left(\frac{df}{dt}\right)_1 \tag{25}$$

atunci se obține un sistem de ecuații liniare din care rezultă variațiile de viteze

$$\dot{q}_j(\tau_1)-\dot{q}_j(\tau_2) = -\frac{A_{j0}}{B_0}\left(\frac{df}{dt}\right)_1 \tag{26}$$

și multiplicatorul de impuls

$$\mu_{21} = -\frac{A_0}{B_0}\left(\frac{df}{dt}\right)_1 \tag{27}$$

Însă, deoarece $\left(\frac{df}{dt}\right)_1$ este o valoare necunoscută, lipsește o ecuație pentru ca necunoscutele să fie complet determinate. Ecuația care lipsește se poate obține numai prin experiențe efectuate pe sistemele ce se studiază. Se admite ca valabilă legea, verificată experimental, care arată că raportul dintre percuția din a doua fază și cea din prima este independent de viteze. Acest raport depinde numai de proprietățile fizice ale sistemului și poartă numele de coeficient de restituire $R(0\leqslant R\leqslant 1)$. Avem deci

$$R = \frac{\mu_{21}}{\mu_{02}} \tag{28}$$

Ținînd seama acum de relațiile (22) și (27) se obține ecuația căutată

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_1 = -R\left(\frac{df}{dt}\right)_0 \tag{29}$$

Pentru a determina vitezele generalizate la sfîrșitul ciocnirii se adună relațiile (21) și (26). Folosind ecuația (29) se obține:

$$\dot{q}_j(\tau_1)-\dot{q}_j(\tau_0)=(1+R)\frac{A_{j0}}{B_0}\left|\frac{df}{dt}\right|_0;\ (j=1,2,\ldots,n) \tag{30}$$

Aceste relații determină vitezele la sfîrșitul ciocnirii sistemului în funcție de vitezele de la începutul ciocnirii.

Egalitatea în cea de-a doua relație din (14) este valabilă conform ecuației (29) numai pentru $R=0$, deci în cazul ciocnirii plastice. În acest caz din relațiile (26) și (27) rezultă $\dot{q}_j(\tau_1)=\dot{q}_j(\tau_2)$; $\mu_{21}=0$ ceea ce înseamnă că cea de-a doua fază a ciocnirii lipsește.

Pentru o scriere mai simplificată a ecuațiilor de mai sus se vor face notațiile

$$q_i(\tau_0)=q_i(\tau_1)=q_{ic}$$

$$\dot{q}_i(\tau_0)=\dot{q}'_{ic};\ \dot{q}_i(\tau_1)=\dot{q}_{ic};\ (i=1,2,\ldots,n) \tag{31}$$

Variațiile vitezelor generalizate $\dot{q}'_{ic}-\dot{q}_{ic}$ $(i=1,2\ldots n)$ se determină din ecuațiile (30).

Formulele (30) s-au stabilit pornind de la ecuațiile lui Lagrange. Dacă ecuațiile diferențiale ale mișcării se obțin printr-un alt procedeu, cu ipotezele admise, se pot calcula în același mod variațiile de viteze. De fapt formulele (30) se pot aplica și în aceste cazuri numai că în locul mărimilor a_{ij} trebuie considerați coeficienții derivatelor de ordinul doi din ecuațiile diferențiale ale mișcării.

CONTACTUL DINTRE SISTEM și LEGĂTURĂ

Pentru a se vedea cum se face studiul mișcării ulterioare ciocnirii cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange, se vor considera reacțiunile introduse de legăturile unilaterale. Se va presupune din nou legătura unilaterală scrisă sub forma (1). În cazul cînd este valabilă inegalitatea, sistemul este liber, mișcarea lui obținută cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange (11) este determinată de forțele generalizate $Q_i(i=1,2,\ldots,n)$. Vitezele și accelerațiile nu sînt supuse la nici o condiție de către legătura unilaterală.

Să presupunem că sistemul se află pe legătură, adică este valabilă egalitatea (1). Astfel se va considera, de exemplu, momentul $t=\tau_1$, corespunzător sfîrșitului unei ciocniri, cînd este valabilă condiția (5). În cazul inegalității (5) sistemul părăsește legătura și accelerațiile nu sînt supuse la nici o condiție de către legătură unilaterală. Dacă însă este valabilă egalitatea (5) atunci într-o vecinătate $t>\tau_1$ va trebui să avem

$$\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_1\geqslant 0 \tag{32}$$

care reprezintă condiția ce trebiue îndeplinită de accelerații datorită legăturii unilaterale.

Folosind notațiile introduse anterior se poate stabili identitatea

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n}A_i\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial q_i}\right]+\Phi \tag{33}$$

unde $\Phi=\Phi(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n,q_1,q_2,\ldots,q_n,t)$ este o funcție ce nu conține accelerațiile qj $(j=1,2,\ldots,n)$. Într-adevăr, deoarece avem

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_i=A\frac{\partial f}{\partial q_j}$$

coeficientul lui $\ddot{q}_j$ din membrul drept al relației (33) va fi $\frac{\partial f}{\partial q_j}$, același ce se obține și din calculul direct al derivatei $\frac{d^2f}{dt^2}$. Astfel, condiția pentru accelerații este

$$\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_1=\frac{1}{A}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial q_i}\right]+\Phi\geqslant 0 \tag{34}$$

Daca sistemul continuă să rămînă pe legătură este necesar să fie verificată egalitatea (34) în momentul $t=\tau_1$.

Pentru ca mișcarea sistemului să se efectueze ca și cînd ar fi liber, ținînd seama de (11) și (34) rezultă că, în momentul $t=\tau_1$, forțele generalizate Q_i vor trebui să satisfacă condiția

$$\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n}A_iQ_i+\Phi\geqslant 0 \tag{35}$$

Dacă forțele generalizate îndeplinesc această condiție mișcarea ulterioară se studiază cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange (11).

Să presupunem că forțele generalizate Q nu verifică condițiile (35), ci avem

$$\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n}A_iQ_i+\Phi<0 \tag{36}$$

atunci, pentru studiul mișcării ulterioare, pe lîngă forțele generalizate trebuie introduse în ecuațiile lui Lagrange și forțele de legătură. Sistemul se găsește pe legătură, deci accelerațiile generalizate vor verifica egalitatea (34). Ecuațiile diferențiale cu care se va studia mișcarea în acest caz sînt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial q_i}=Q_i+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_i};\ (i=1,2,\ldots,n) \tag{37}$$

Din ecuațiile (37) și egalitatea (34) rezultă

$$\left(\frac{d^2f}{df^2}\right)=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n}A_iQ_i+\Phi+\frac{\lambda}{A}\sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial f}{\partial q_i}=0 \tag{38}$$

Deoarece $\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial f}{\partial q_i} = -B$, valoarea lui λ ce se obține din această ecuație este:

$$\lambda = \frac{\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} A_i Q_i + \Phi}{B} \tag{39}$$

Conform condiției (36) numărătorul acestei fracții este negativ. Nuimtorul B este negativ deoarece $-B$ este o formă patratică în variabilele $\frac{\partial f}{\partial q_i}$ (i=1, 2, ... n) reciprocă formei patratice pozitiv definite $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_j}$. Prin urmare în acest caz rezultă

$$\lambda > 0 \tag{40}$$

Din cele arătate mai sus se constată că sistemul rămîne pe legătura $f=0$ atîta timp cît factorul λ nu ia o valoare negativă, mișcarea studiindu-se cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange (37).

BIBLIOGRAFIE

[1] Suslov G. K. : *Mecanică rațională* Vol. I și II Ed. Tehnică, București 1950.

[2] Gh. Silaș, L. Brîndeu: Behandlung periodischer Bewegungen von Rüttelsystemen mit den Lagrangeschen Gleichungen. VDI Berichte, Nr. 135/1969.

[3] L. Brîndeu: Contribuții privind studiul mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante. Teză de doctorat. Institutul politehnic Timișoara 1970.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

(РЕЗЮМЕ)

Приводится обзор динамики виброударных систем в обобщенных координатах. Движения системы, в предположении односторонней связи, классифицируется в зависимости от природы и продолжительности контакта. Определяются необходимые условия существования ударных движений в которых контакт между системой и односторонней связью является мгновенным или нет.

DAS STUDIUM DER BEWEGUNG VON STOSSSCHWINGERN MIT DEN LAGRANGESCHEN GLEICHUNGEN

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es wird ein allgemeines Studium über die Dynamik von Stossschwingern mit Hilfe von verallgemeinerten Koordinaten gemacht. Es wird vorausgesetzt, dass es eine einseitige Bindung gibt. Die Bewegungen des Verbandes werden nach der Art und nach der Dauer des Kontaktes eingeteilt. Es werden die notwendigen Bedingungen bestimmt, damit Bewegungen mit Stössen auftreten in welchen der Kontakt zwischen Verband und einseitiger Bindung plötzlich ist oder nicht.

Buletinul şt. şi tehn. al I.P.T. Seria Mat.—Fiz.—Mec. teor. şi apl. Tom 17(31) fasc. 2/1972

PUNCTELE SINGULARE ŞI STABILITATEA LOR LA AUTOVIBRAŢIILE UNUI CORP PE O SUPRAFAŢĂ CILINDRICĂ ASPRĂ ÎN ROTAŢIE UNIFORMĂ

DE

GH. SILAŞ, H.J. KLEPP

1. INTRODUCERE

Pentru studiul autovibraţiilor în sisteme mecanice produse de frecarea uscată se consideră în general modelul format dintr-un corp cu legături elastice aşezat pe o suprafaţă plană aspră care se mişcă cu viteză constantă. Un astfel de model se foloseşte la studiul vibraţiilor sculelor maşinilor unelte aşchietoare. Şi oscilaţiile pendulului lui Froude intră în această categorie de probleme. Pentru studiul mişcării cu elongaţii finite se determină în [1], [2] unele proprietăţi generale sau se fac ipoteze simplificatoare asupra cuplului de frecare ce apare în articulaţia pendulului [3].

În această lucrare se consideră un sistem cu un grad de libertate format dintr-un corp care se poate deplasa pe faţa interioară a unei suprafeţe cilindrice aspre, cu ax orizontal, care se roteşte uniform cu viteză unghiulară constantă. Astfel de probleme apar de exemplu în [4] la studiul funcţionării sitelor cilindrice.

Forţa de frecare ce acţionează între corp şi suprafaţă cilindrică se consideră proporţională cu reacţiunea normală variabilă a cilindrului. Coeficientul de frecare se consideră în conformitate cu ipoteza general acceptată în această categorie de probleme (viteze relative mici, presiuni mici) ca fiind constant. De asemenea se ia în considerare o forţă de amortizare ce depinde de viteza unghiulară a corpului.

Se analizează punctele singulare ale sistemului şi stabilitatea lor pentru diferite forme ale depedenţei forţei de amortizare de viteza unghiulară a corpului.

Este analizat cazul cînd legătura este bilaterală. Considerînd numai domeniile cu reacţiunea normală nenegativă se obţin rezultate ce corespund cazului cînd legătura este unilaterală.

2. STABILIREA ECUAŢIEI DIFERENŢIALE A MIŞCĂRII.

Asupra corpului cu masa m considerat ca un punct material acţionează o forţă de frecare care este egală cu μN unde N este reacţiunea normală variabilă a cilindrului şi $\mu = tg\varphi$ este coeficientul de frecare de alunecare presupus constant dintre corp şi cilindru.

Forța de amortizare ce depinde de viteza unghiulară a corpului se presupune de forma

$$-mg\cdot\left(\frac{R}{g}\right)^{s/2}\cdot h_s\cdot|\dot{\theta}|^s\cdot\operatorname{sgn}\dot{\theta}$$

unde R este raza cilindrului, g accelerația gravitațională, h un factor de proporționalitate constant nenegativ și θ este unghiul care determină poziția corpului față de poziția verticală inferioară.

Viteza unghiulară constantă a cilindrului este $\sqrt{\frac{g}{R}}\,\Omega>0$.

Folosind sistemul de coordonate intrinsec și scriind ecuațiile diferențiale ale mișcării se obține:

$$N=mR\dot{\theta}^2+mg\cos\theta$$

$$m\frac{d(R\dot{\theta})}{dt}=\mu|N|\operatorname{sgn}\left(\Omega\sqrt{\frac{g}{R}}-\dot{\theta}\right)-mg\sin\theta-mg\left(\frac{R}{g}\right)^{s/2}h_s|\dot{\theta}|^s\operatorname{sgn}\dot{\theta}.$$

Se face schimbarea de variabilă $\tau\equiv\sqrt{\frac{g}{R}}\,t$ și se notează $\omega=\frac{d\theta}{d\tau}=\dot{\theta}\sqrt{\frac{R}{g}}$.

Relația (1) devine

$$n\equiv\frac{N}{mg}=\omega^2+\cos\theta. \tag{3}$$

Ecuația diferențială (2) neliniară autonomă de ordinul doi se scrie sub forma unui sistem

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\omega\,;\quad\frac{d\omega}{d\tau}=F(\theta,\omega) \tag{4}$$

unde

$$F(\theta,\omega)=-h_s|\omega|^s\operatorname{sgn}\omega+\omega^2\,(\operatorname{tg}\varphi)\operatorname{sgn}n\cdot\operatorname{sgn}(\Omega-\omega)-\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\sin[\theta-$$

$$-\varphi\operatorname{sgn}n\cdot\operatorname{sgn}(\Omega-\omega)]. \tag{5}$$

La un sistem asemănător conduce și studiul mișcării pendulului lui Froude [1] dacă strîngerea inițială a articulației mobile se neglijează și se consideră un coeficient de frecare constant.

Sistemul (4) este mai general decît cele analizate în [3] prin faptul că în expresia forței de frecare se consideră reacțiunea normală variabilă.

3. ANALIZA PUNCTELOR SINGULARE

Punctele singulare, adică pozițiile de echilibru ale corpului, pentru cazul legăturii bilaterale se determină din ecuația

$$F(\theta,0)=0 \tag{6}$$

Pe axa 00 al planului de fază, adică pentru $\omega=0$ rezultă

$$\operatorname{sgn} n=\operatorname{sgn}\cos\theta=\begin{cases}+1 & 0\leqslant|\theta|<\pi/2\\ -1 & \pi/2<|\theta|\leqslant\pi\end{cases}$$

și $\operatorname{sgn}(\Omega-\omega)=\operatorname{sgn}\Omega=+1$.

În domeniul $0\leqslant|\theta|<\pi/2$ soluția ecuației (6) este

$$\theta_1=\varphi \tag{7}$$

În domeniul $\pi/2<|\theta|\leqslant\pi$ se obține pentru ecuația (6) soluția

$$\theta_2=\pi-\varphi. \tag{8}$$

Pentru a determina natura punctelor singulare, adică stabilitatea pozițiilor de echilibru se face schimbarea de funcții $\theta=\theta_i+\xi$ $(i=1,2)$ unde ξ se consideră o mărime mică.

Se notează

$$\eta=\frac{d\xi}{d\tau}=\frac{d\theta}{d\tau}=\omega.$$

Ecuațiile diferențiale ale mișcării în jurul punctelor singulare θ_i $(i=1,2)$ devin

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\eta;\qquad \frac{d\eta}{d\tau}=F_1(\xi,\eta) \tag{9}$$

unde

$$F_1(\xi,\eta)=-h_s|\eta|^s\operatorname{sgn}\eta+\eta^2(\operatorname{tg}\varphi)\operatorname{sgn} n\cdot\operatorname{sgn}(\Omega-\eta)-\frac{\operatorname{sgn} n}{\cos\varphi}\sin\xi \tag{9'}$$

și

$$n=\eta^2+\cos(\theta_i+\xi).$$

În jurul punctelor se consideră domenii în care $\operatorname{sgn}(\Omega-\eta)=+1$ și n păstrează semn constant.

3,1. Cazul $h_s=0$

Prin liniarizare se obține pentru acest caz

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\eta;\qquad \frac{d\eta}{d\tau}=-\operatorname{sgn} n\,\frac{\xi}{\cos\varphi}.$$

Punctul singular $\theta_1=\varphi$ corespunde unui caz deosebit [1] cînd din ecuația în prima aproximație nu se poate determina caracterul lui. Dacă se iau în considerare și termenii de gradul doi, atunci se obține pentru traiectoriile de fază în jurul punctului singular $\xi=0$ $(\theta_1=\varphi)$ ecuația

$$\eta^2\exp(-2\xi\operatorname{tg}\varphi)-\Phi_1(\xi)=\text{const.}$$

unde

$$\Phi_1(\xi)=\frac{1+2\xi\,\mathrm{tg}\varphi}{2\,(\mathrm{tg}\varphi)^2\cos\varphi}\cdot\exp\,(-2\xi\mathrm{tg}\varphi).$$

Abscisele ξ_i ale punctelor de întoarcere ($\mathrm{sgn}\,\xi_i=(-1)^i$, $i=1,2,3,\ldots$) a mișcării în jurul lui $\xi=0$ se obține din ecuația $\Phi_1(\xi_i)=\Phi_1(\xi_{i+1})$ ($i=1,2,3,\ldots$). Rezultă $\xi_i=\xi_{i+2}$ ($i=1,2,3,\ldots$). Mișcarea se efectuează cu amplitudini constante și punctul singular $\theta_1=\varphi$ este un centru.

Punctul singular $\theta_2=\pi-\varphi$ cu $\mathrm{sgn}\,n=-1$ este o șa și această poziție de echilibru a corpului este nestabilă.

3,2. Cazul s=1

Înlocuind în (9') $s=1$, liniarizînd sistemul (9) și presupunînd că în jurul punctelor singulare $\mathrm{sgn}\,(\Omega-\eta)=+1$ se obține

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\eta\,;\quad \frac{d\eta}{d\tau}=-h_1\eta-\frac{\mathrm{sgn}\,n}{\cos\varphi}\cdot\xi \tag{10}$$

În conformitate cu [1] pentru punctul singular $\theta_1=\varphi$ pot apare în funcție de valoarea lui h_1 următoarele situații: pentru $h_1\in\left(0,\frac{2}{\sqrt{\cos\varphi}}\right)$ punctul singular este un focar stabil iar pentru $h_1\geqslant\frac{2}{\sqrt{\cos\varphi}}$ un nod stabil.

Deoarece pentru punctul singular $\theta_2=\pi-\varphi$ factorul lui ξ din (10) este pozitiv, rezultă că acest punct este o șa și poziția de echilibru corespunzătoare este instabilă.

3,3. Cazul s=2

Funcția $F_1(\xi,\eta)$ este

$$F_1(\xi,\eta)=-h_2\eta^2\mathrm{sgn}\eta+\eta^2(\mathrm{tg}\varphi)\,\mathrm{sgn}\,n\cdot\mathrm{sgn}\,(\Omega-\eta)-\frac{\mathrm{sgn}\,n}{\cos\varphi}\cdot\sin\xi. \tag{11}$$

Prin liniarizare se obține

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\eta\,;\quad \frac{d\eta}{d\tau}=-\frac{\mathrm{sgn}\,n}{\cos\varphi}\,\xi \tag{12}$$

Concluziile în prima aproximație sînt următoarele:

Punctul singular $\theta_2=\pi-\varphi$ este o șa.

Punctul singular $\theta_1=\varphi$, pentru care factorul lui ξ în (12.2) este negativ iar factorul lui η este nul este un caz critic și conform cu [1] nu se pot trage concluzii asupra stabilității acestei poziții de echilibru din ecuațiile în prima aproximație.

Ținînd seama în (11) și de termenii care conțin ξ și η la puterea a doua și neglijînd termenii cu puteri mai mari decît doi, se obține pentru ecuația traiectoriilor de fază în jurul punctului singular $\xi=0$ ($\theta_1=\varphi$) expresia:

$$\frac{d\eta^2}{d\xi}=-\frac{2}{\cos\varphi}\,\xi-2\eta^2\,(h_2\,\mathrm{sgn}\,\eta-\mathrm{tg}\varphi).$$

Pentru determinarea succesiunii amplitudinilor în jurul punctului singular se consideră funcția

$$V_{sgn\,\eta}(\xi) = \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \xi^2 \cdot \frac{1}{\alpha^2\xi^2} [1-(1-\alpha\xi)\ \exp\ (\alpha\xi)] =$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \xi^2 \cdot \Phi_2(\alpha\xi)$$

unde

$$\alpha = 2(h_2 \operatorname{sgn}\eta - \operatorname{tg}\varphi) = \begin{cases} \alpha_+ = 2(h_2 - \operatorname{tg}\varphi) \\ \alpha_- = -2(h_2 + \operatorname{tg}\varphi). \end{cases}$$

Presupunînd că prima semioscilație începe din repaus din poziția $\xi_1 < 0$, poziția $\xi_2 > 0$ unde viteza se anulează din nou se obține din ecuația $V_+(\xi_2) = V_+(\xi_1)$, deoarece în această semioscilație sgn $\eta = +1$.

Punctul $\xi_3 < 0$ unde viteza se anulează din nou, după o semioscilație cu $\operatorname{sgn}\eta = -1$ rezultă din ecuația $V_-(\xi_3) = V_-(\xi_2)$.

Continuînd astfel, din succesiunea amplitudinilor rezultă stabilitatea sau instabilitatea poziției de echilibru. Datorită faptului că

$$\frac{d\Phi_2(\alpha\xi)}{d(\alpha\xi)} = \frac{2}{(\alpha\xi)^3} \left\{ \left[1 - \alpha\xi + \frac{1}{2}(\alpha\xi)^2 \right] \exp\ (\alpha\xi) - 1 \right\}$$

este pozitivă pentru orice valoare a lui $\alpha\xi$, ceea ce se poate arăta ușor, urmează că funcția $\Phi_2(\alpha\xi)$ este crescătoare.

Pentru $\xi > 0$ urmează că $\alpha_-\xi < \xi\alpha_+$ și prin urmare $\Phi_2(\xi\alpha_-) < \Phi_2(\xi\alpha_+)$. Deci $V_-(\xi) < V_+(\xi)$.

Pentru $\xi < 0$ rezultă $\xi\alpha_- > \xi\alpha_+$ și prin urmare $\Phi_2(\xi\alpha_-) > \Phi_2(\xi\alpha_+)$ și deci $V_-(\xi) > V_+(\xi)$.

Pentru astfel de valori ale funcției $V_{sgn\,\eta}$, rezultă că mișcarea în jurul punctului singular $\xi = 0$ ($\theta = \varphi$) se efectuează cu amplitudini descrescătoare și traiectoria de fază este o spirală ce se apropie de punctul singular. Rezultă că această poziție de echilibru este stabilă.

Comparînd rezultatele obținute pentru diferite valori ale lui s se constată că poziția de echilibru $\theta_2 = \varphi$ este stabilă, iar $\theta_2 = \pi - \varphi$ este instabilă. Forma forței de amortizare nu schimbă stabilitatea pozițiilor de echilibru.

Dacă în cadrul mai multor sisteme vibrante se pune problema determinării amortizării vîscoase ($s = 1$) echivalentă cu o amortizare fizică dată, numai cu scopul de a obține o ecuație diferențială liniară a mișcării, în cadrul unui sistem cu neliniarități amortizarea vîscoasă nu mai constituie întotdeauna modelul cel mai simplu pentru a reprezenta amortizarea. Pentru sistemul analizat în această lucrare, considerarea unei amortizări turbulente ($s = 2$) permite obținerea unei integrale prime a ecuației diferențiale a mișcării, cu care se poate efectua studiul în planul de fază și din care se poate determina succesiunea amplitudinilor oscilațiilor.

BIBLIOGRAFIE

[1] Kauderer, H. *Nichtlineare Mechanik*, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958, pg. 187, 397—399, 406—409.

[2] Magnus, K. *Schwingungen*, B. G. Teubner Verlagesellschaft, Stuttgart, 1961, pag. 110—114.

[3] Barbaşin, E.A. Tabueva, V.A. *Dinamiceskie sistemi s cilindriceskim fazovim prostranstvo*, Izdatelstvo Nauka, Moskva, 1969, pag. 211—235.

[4] Letoşnev, M.N. *Selskohoziastvennie maşini*, Selhozghiz, Moskva, 1955.

ОСОБЫЕ ТОЧКИ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТЕЛА НА ЦИЛЛИНДРИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ

(РЕЗЮМЕ)

Определяются особые точки для системы с одной степенью свободы совершающей движения под воздействием силы трения и рассматривается устойчивость этих точек при разных затухающих усилиях воздействующих на тело.

Рассматриваются критические случаи когда в первом приближении нельзя установить равновесное положение.

DIE SINGULÄREN PUNKTE UND IHRE STABILITÄT BEI DER BEWEGUNG EINES KÖRPERS AUF EINER RAUHEN SICH GLEICHFÖRMIG DREHENDEN ZYLINDERFLÄCHE

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es werden die singulären Punkte eines Verbandes mit einem Freiheitsgrad bestimmt, welcher Reibungsschwingungen beschreibt. Die Stabilität dieser Punkte für verschiedene Formen der Dämpfungskraft, welche auf den Körper wirkt, wird untersucht. Es werden auch die Sonderfälle betrachtet, wenn man aus dem Studium in erster Näherung den Charakter dieser Gleichgewichtslagen nicht bestimmen kann.

Buletinul şt. şi tehn. al I.P.T. Seria Mat.—Fiz.—Mec. teor. şi apl. Tom 17(31) fasc. 2/1972

ASUPRA STABILITĂŢII REGIMURILOR STAŢIONARE ALE UNOR MAŞINI

DE

I. GROŞANU

1. Regimuri staţionare periodice.

În studiul dinamicii multor maşini momentul de inerţie redus este variabil, avînd o variaţie periodică cu unghiul de rotaţie al motorului de acţionare. Pentru aceste tipuri de agregate se pune problema stabilirii unor parametri pentru care să corespundă regimuri staţionare periodice.

Se întîlneşte o mare varietate de maşini care au momentul de inerţie redus variabil. Se va considera cazul unor maşini care sînt acţionate de motoare electrice asincrone caz care se întîlneşte frecvent. Motorul electric de acţionare se consideră montat rigid pe axul maşinii de lucru. Deci se neglijează elasticităţile organelor care constituie agregatul. Momentul redus M_L al maşinii de lucru se consideră o funcţie periodică de unghiul de rotaţie φ al rotorului motorului de acţionare. Caracteristica statică M_s a motorului electric asincron se presupune aproximată printr-o funcţie cunoscută de viteza unghiulară Ω.

Pentru determinarea regimurilor staţionare în mod obişnuit se foloseşte caracteristica statică a motorului de acţionare [2], [3]. Este însă posibil să fie considerată caracteristica dinamică aproximativă a motorului electric asincron [5] pentru care se admite o constantă de timp mică, avînd ordinul de mărime al diferenţei dintre momentul motorului de acţionare şi momentul redus al maşinii de lucru care se presupune mică.

Cu aceste consideraţii se vor studia agregate pentru care regimurile staţionare sînt definite de ecuaţiile:

$$f(\varphi)\Omega\Omega'+\varepsilon g(\varphi)\Omega^2+\varepsilon\alpha\Omega=\varepsilon\beta M-\varepsilon F(\varphi),$$

$$\varepsilon T\Omega M'+M=M_s(\Omega),\quad \Omega'=d\Omega/d\varphi, \tag{1}$$

unde ε este un parametru mic, α, β, T sînt constante, iar $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ şi $F(\varphi)$ sîn funcţii periodice cu perioada 2π.

Regimurile staţionare se determină cu aproximaţiile:

$$\Omega=\Omega^{(0)}+\varepsilon\Omega^{(1)}+0(\varepsilon^2),\quad M=M^{(0)}+\varepsilon M^{(1)}+0(\varepsilon^2), \tag{2}$$

cu care pentru aproximaţia de ordinul zero se găsesc soluţiile particulare:

$$\Omega^{(0)}=\text{constant},\quad M^{(0)}=M_s(\Omega^{(0)}). \tag{3}$$

În aproximaţia de ordinul întîi din sistemul (1) se găseşte:

$$f(\varphi)\Omega^{(0)}\Omega^{(1)\prime}+g(\varphi)\Omega^{(0)2}+\alpha\Omega^{(0)}=M_s(\Omega^{(0)})-F(\varphi). \tag{4}$$

Deoarece se urmăreşte ca agregatul să funcţioneze în regimuri staţionare periodice, este necesar ca să se anuleze termenii constanţi din ecuaţia (4). Dezvoltînd în serie funcţiile periodice $f(\varphi)$, $g(\varphi)$, $F(\varphi)$ şi notînd cu $[f]_c$ termenul constant din dezvoltarea funcţiei $f(\varphi)$, condiţia de periodicitate a regimurilor staţionare este:

$$[g]_c\Omega^{(0)2}+\alpha\Omega^{(0)}=\beta M_s(\Omega^{(0)})-[F]_c \tag{5}$$

Din rezolvarea acestei ecuaţii algebrice se găsesc valorile vitezei unghiulare $\Omega_{(0)}$ pentru care au loc regimuri staţionare periodice.

2. Stabilitatea regimurilor staţionare,

Pentru studiul stabilităţii regimurilor staţionare se foloseşte metoda perturbaţiilor [4]. Regimul staţionar periodic (Ω,M) se înlocuieşte cu regimul $(\Omega+u, M+v)$, unde u şi v sînt perturbaţii mici. Înlocuind regimul perturbat în sistemul (1), după liniarizare se obţin ecuaţiile în perturbaţii:

$$f(\varphi)\Omega u'+(f(\varphi)\Omega'+2\varepsilon g(\varphi)\Omega+\varepsilon\alpha]u-\varepsilon\beta v=0,$$

$$\left(\varepsilon TM'-\frac{dMs}{\Omega}\right)u+\varepsilon T\Omega q'+v=0. \tag{6}$$

Coeficienţii sistemului (6) fiind periodici se consideră soluţii de forma:

$$u=e^{\lambda\varphi}P(\varphi),\ v=e^{\lambda\varphi}Q(\varphi), \tag{7}$$

unde $P(\varphi)$ şi $Q(\varphi)$ sînt funcţii periodice cu perioada 2π. Pentru determinarea acestor funcţii şi a exponenţilor caracteristici λ se consideră cazul cînd $\varepsilon=0$, pentru care se găsesc soluţiile:

$$u^{(0)\prime}=0,\ v^{(0)}=\beta\left(\frac{dMs}{d\Omega}\right)_0 u^{(0)}, \tag{8}$$

de unde, fără a restrînge generalitatea se admite $u_{(?)}=1$ şi deci $\lambda_{(?)}=0$.

Înlocuind soluţiile (7) în sistemul (6) se găseşte:

$$f(\varphi)\Omega(P'+\lambda P)+[f(\varphi)\Omega'+2\varepsilon g(\varphi)\Omega+\varepsilon\alpha]P-\varepsilon\beta Q=0,$$

$$\left(\varepsilon TM'-\frac{dMs}{d\Omega}\right)P+\varepsilon T\Omega Q'+(1+\varepsilon w\Omega\lambda)Q=0 \tag{9}$$

Cu dezvoltările

$$\lambda=\varepsilon\lambda^{(1)}+0(\varepsilon^2),\ P=P^{(0)}+\varepsilon P^{(1)}+0(\varepsilon^2),\ Q=Q^{(0)}+\varepsilon Q^{(1)}+0(\varepsilon^2), \tag{10}$$

din (9), pentru aproximația de ordinul zero se obțin soluțiile:

$$P^{(0)}=1, \quad Q^{(0)}=\left(\frac{dMs}{d\Omega}\right)_{\Omega=\Omega^{(0)}}=\left(\frac{dM}{d\Omega}\right)_0, \tag{11}$$

iar în aproximația de ordinul întîi, prima din ecuațiile acestui sistem devine

$$f(\varphi)\Omega^{(0)}[P^{(1)}+\lambda^{(1)}]+f(\varphi)\Omega^{(1)\prime}+2g(\varphi)\Omega^{(0)}+\alpha-\beta Q^{(0)}=0 \tag{12}$$

Pe baza periodicității funcției $P^{(1)}$ (φ), din sistemul (12) se găsește condiția:

$$\lambda^{(1)}=\frac{\beta\left(\frac{dMs}{d\Omega}\right)_0-\alpha-2[g]_c\Omega^{(0)}-[f\Omega^{(1)\prime}]_c}{[f]_0\Omega^{(0)}}$$

Pentru ca regimul staționar periodic (Ω, M) să fie stabil este necesară condiția $\lambda<0$ și deoarece se admite că $\Omega>0$, $[f]_c>0$, din (13) rezultă condiția de stabilitate:

$$\beta\left(\frac{dMs}{d\Omega}\right)_0-\alpha-2[g]_c\Omega^{(0)}-[f\Omega^{(1)\prime}]_c<0. \tag{14}$$

3. Aplicație.

Pentru multe agregate momentele reduse de inerție și al mașinii de lucru au expresii de forma

$$J(\varphi)=J_0+mr^2\sin^2\varphi, \quad M_L=(A+B\cos\varphi)r\,|\sin\varphi|+M_{0L}, \tag{15}$$

iar caracteristica statică a mașinii de lucru se exprimă aproximativ prin

$$M_s(\Omega)=\frac{2M_{max}S_k\left(1-\frac{\Omega}{\omega_c}\right)}{\left(1-\frac{\Omega}{\omega_c}\right)^2+S_k^2}, \tag{16}$$

unde J_0, m, r, A, B, M_{0L}, M_{max}, S_k și ω_c sînt constantate.

Limitînd dezvoltarea în serie a funcției $\sin\varphi$ la primii doi termeni și folosind notațiile:

$$\varepsilon\delta=\frac{1}{2}\frac{mr^2}{J_0}, \quad \varepsilon\alpha=\frac{c}{J_0}, \quad \varepsilon\beta=\frac{1}{J_0}, \quad \varepsilon\gamma=\frac{4r}{\pi J_0}, \quad \varepsilon T=T_d, \tag{17}$$

sistemul (1) devine:

$$(1+2\varepsilon\delta\sin^2\varphi)\Omega\Omega'+\varepsilon\delta\sin^2 2\varphi\Omega^2+\varepsilon\nu\Omega=\varepsilon\beta(M-M_{0L})-\varepsilon\gamma(A+B$$

$$\cos\varphi)\left(1-\frac{1}{3}\cos 2\varphi\right), \quad \varepsilon T\Omega M'+M=2M_{max}S_k\frac{1-\frac{\Omega}{\omega_c}}{\left(1-\frac{\Omega}{\omega_c}\right)^2+S_k^2}. \tag{18}$$

Pentru acest caz particular condiţia (5) devine

$$\frac{1-\frac{\Omega^{(0)}}{\omega_c}}{\left(1-\frac{\Omega^{(0)}}{\omega_c}\right)^2+S_k^2}=\frac{c\Omega^{(0)}}{2M_{max}S_k}+\frac{\pi M_{0L}+4rA}{2\pi M_{max}S_k}.$$

Punînd condiţia (19) sub forma $\Gamma(\Omega^{(0)})=\Gamma_1(\Omega^{(0)})$ în fig. 1 sînt reprezentate patru caracteristici statistice $\Gamma(\Omega^{(0)})$ pentru $\omega_c=100s^{-1}$ şi o dreaptă $(\Gamma_1\Omega^{(0)})$. La intersecţia lor se obţin valorile $\Omega_1^{(0)}$ şi $\Omega_2^{(0)}$ pentru care au loc regimuri staţio-

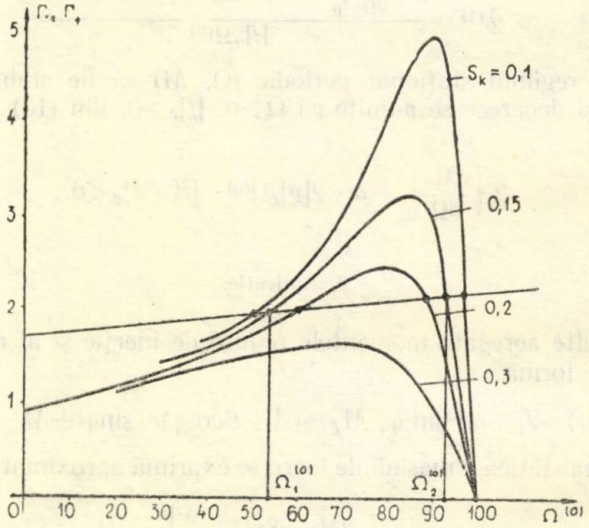


Fig. 1.

nare periodice. Pe fig. 1 sînt marcate cele două valori corespunzătoare caracteristici statice cu $S_k=0{,}15$. Condiţia de stabilitate pentru cazul particular analizat devine [1], [2],

$$\frac{d\Gamma_1}{d\Omega^{(0)}}>\frac{d\Gamma}{d\Omega^{(0)}}. \tag{20}$$

Se observă că numai regimul staţionar corespunzător valorii $\Omega_2^{(0)}$ este stabil.

BIBLIOGRAFIE

[1] Christ: H. Stabile und instabile Betriebszustände eines federnd gelagerten Motors mit Unwucht, ZAMM, Bd. 47, S.T., 1967.

[2] I. Groşanu: Contribuţii privind studiul mişcărilor staţionare şi nestaţionare ale sistemelor mecanice excitate inerţial, acţionate cu motoare electrice. Teză de doctorat I.P. Timişoara, 1970.

[3] Kononenko: V.O. *Nekatorie sistemî s organicennîm vozbujdeniem.* Izd-vo Nauka, Moskva, 1964.

[4] Morrison: J. A. Asymptotic Analysis of a Nonlinear Autonomous Vibratory System. The Bell System Technical Journal, January, 1970.

(5) V. L. Veiț: *Dinamika mașinnih agregatov.* Izd-vo Mașinostroienie, Leningrad, 1969.

К УСТОЙЧИВОСТИ СТАНЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ НЕКОТОРЫХ МАШИН

(РЕЗЮМЕ)

В работе определяются условия существования (5) периодических стационарных режимов для агрегатов с приведенным моментам инерции в виде периодической функции от угла поворота.

Методом возбуждений определяется условия устойчивости (14) периодических станционарных режимов.

Применяя приближенную формулу для статической характеристики асинхронного двигателя, анализируется пример агрегата у которого приведенный момент является периодической функции.

ÜBER DIE STABILITÄT DER STATIONÄREN BEWEGUNGSZUSTÄNDE EINIGER MASCHINEN.

(ZUSAMMENFASSUNG)

Im Beitrag wird die Bedingung (5) für die Existenz von stationären periodischen Bewegungszustände eines Aggregats, dessen reduziertes Trägheitsmoment eine periodische Function des Drehwinkels ist, bestimmt.

Mit der Perturbationsmethode wird die Stabilitätsbediungung (14) der stationären periodischen Bewegungszustände berechnet.

Als Beispiel wird ein Aggregat mit einem Asynchronmotor, desen statische Charakteristik durch eine Näherungsformel ausgedrückt wird und für welches das reduzierte Moment der Arbeitsmaschine eine periodische Funktion ist, untersucht.

Buletinul şt. şi tehn. al I.P.T. Seria Mat.—Fiz.—Mec. teor. şi apl. Tom 17(31) fasc. 2/1972

ASUPRA MIŞCĂRII RELATIVE A RIGIDULUI

DE

N. PLITEA (*INST. POLITEHNIC CLUJ*)

Problema mişcării relative a rigidului în cazul unui singur reper mobil şi în cazul mai multor repere mobile, pentru viteze şi acceleraţii de ordinul întîi a fost rezolvată în [1] şi [6], iar pentru acceleraţiile de ordinul doi ale punctului material în [5].

În cele ce urmează se va studia această problemă pentru acceleraţiile de ordin oarecare, rezultatele găsite constituind o generalizare a celor obţinute în [1], [6] şi [5].

1. Se vor prezenta mai întîi cîteva aspecte ale distribuţiei acceleraţiilor de ordin oarecare, rezultate obţinute în [4] şi [3].

a. Se consideră un rigid (C) în mişcare generală, mişcare raportată la un reper de referinţă $Oxyz$. Fie A şi B două puncte aparţinînd rigidului iar $\bar{r}$ vectorul de poziţie al punctului B în raport cu punctul A. Notînd cu $\bar{a}_B^{(i)}$ şi $\bar{a}_A^{(i)}$ acceleraţiile de ordinul i ale punctelor B şi A, legea de distribuţie a acceleraţiilor de ordin oarecare a punctelor aparţinînd unui rigid în mişcare generală este:

$$\bar{a}_B^{(i)} = \bar{a}_A^{(i)} + \beta^{(i+1)}\bar{r} \tag{1}$$

Operatorul din relaţia (1) se calculează astfel:

$$\beta^{(s)} = \beta^{(s-1)}\beta^{(1)} + \dot{\beta}^{(s-1)}, \quad \beta^{(0)} = 1, \quad \beta^{(1)} = \bar{\omega}x \tag{2}$$

În relaţia (2) $(\cdot) \equiv \frac{d}{dt}$ este derivată absolut dacă sistemul $Oxyz$ este fix şi $(\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ este derivată relativă (locală) dacă sistemul $Oxyz$ este mobil.

b. Se consideră un punct material M în mişcare relativă în raport cu sistemul mobil $Oxyz$, sistem ce execută o mişcare generală în raport cu sistemul de referinţă fix $O_0x_0y_0z_0$. Se poate scrie conform [3]

$$\bar{a}_a^{(i)} = \bar{a}_t^{(i)} + \bar{a}_r^{(i)} + \bar{a}_c^{(i)} \tag{3}$$

În relația (3) $\bar{a}_a^{(i)}$ este accelerația absolută de ordinul i a punctului M, $\bar{a}_t^{(i)}$ este accelerația de transport de ordinul i, iar $\bar{a}_c^{(i)}$ este accelerația suplimentară (Coriolis) de ordinul i, care se determină după [3] cu relațiile:

$$\bar{a}_c^{(i)} = (i+1)\,\beta^{(i)}\,\bar{v}_r + \sum_{j=1}^{i-1} C_{i+1}^{j+1}\,\beta^{(i-1)}\,\bar{a}_r^{(j)} \tag{4}$$

$$\bar{a}_c^{(i)} = \dot{\bar{a}}_c^{(i-1)} + \beta^{(i)}\bar{v}_r + \beta^{(1)}\,\bar{a}_r^{(i-1)} \tag{5}$$

$$\bar{a}_c^{(i)} = [1-(-1)^i]\,\beta^{(i)}\,\bar{v}_r + \sum_{a=1}^{i-1} B_a \frac{d^a[\beta^{(i-a)}\,\bar{v}_r]}{dt^a} \tag{6}$$

în care

$$B_a = \sum_{l=0}^{i-a-1} (-1)\,C_{i+l}^{a+l+1}\,C_{a+l}^{l}$$

În relațiile (4), (5) și (6) operatorul $\beta^{(s)}$ este definit de (2).

2. Se consideră un rigid (C) în mișcare relativă (fig. 1) în raport cu triedrul mobil (T_1), triedrul ce execută o mișcare generală în raport cu triedrul fix (T). Se cunoaște distribuția de viteze și accelerații de ordinul $1,2,\ldots,i$ în mișcarea rigidului față de triedrul mobil (T_1) și distribuția de viteze și accelerații de ordinul $1,2,\ldots,i$ în mișcarea triedrului mobil (T_1) față de triedrul fix (T_0). Se cere să se determine distribuțiile de accelereații de ordinul i a rigidului în raport cu triedrul fix (T_0).

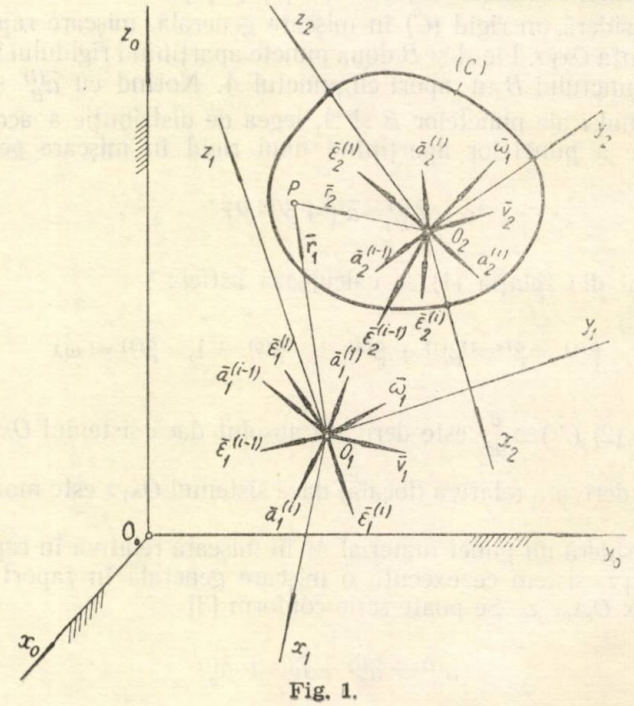


Fig. 1.

Se leagă de corpul (C) un triedru (T_2). Mișcarea triedrului (T_2) față de (T_1) este caracterizată prin parametrii cinematici $\bar{v}_{02}=\bar{v}_2, \bar{a}_{0_2}^{(1)} = \bar{a}_2^{(1)} = \dot{\bar{v}}_2, \bar{a}_{0_2}^{(2)} = \bar{a}_2^{(2)} = \ddot{\bar{v}}_2, \ldots, \bar{a}_{0_2}^{(i)} = \bar{a}_2^{(i)} = \overset{(i)}{\bar{v}}_2, \bar{\omega}_2, \dot{\bar{\omega}}_2 = \bar{\varepsilon}_2^{(1)}, \ddot{\bar{\omega}}_2 = \bar{\varepsilon}_2^{(2)}, \ldots, \overset{(i)}{\bar{\omega}}_2 = \bar{\varepsilon}_2^{(i)}$, $[^{(i)}] \equiv \equiv \frac{\partial^i}{\partial t^i}$ (derivată locală de ordinul i în raport cu T_1). Mișcarea triedrului (T_1) în raport cu (T) este definită prin parametrii cinematici: $\bar{v}_{0_1} = \bar{v}_1, \bar{a}_{0_1}^{(1)} = \bar{a}_1^{(1)} = \dot{\bar{v}}_1, \bar{a}_{0_1}^{(2)} = \bar{a}_1^{(2)} = \ddot{\bar{v}}_1, \ldots, \bar{a}_{0_1}^{(i)} = \bar{a}_1^{(i)} = \overset{(i)}{\bar{v}}_1, \bar{\omega}_1, \dot{\bar{\omega}}_1 = \bar{\varepsilon}_1^{(1)}, \ddot{\bar{\omega}}_1 = \bar{\varepsilon}_1^{(2)}, \ldots, \overset{(i)}{\bar{\omega}}_1 = \bar{\varepsilon}_1^{(i)}$ unde $[^{(i)}] \equiv \frac{d^i}{dt^i}$ (derivată absolută).

Se considetă un punct P al rigidului. Mișcarea punctului P față de (T_1) este o mișcare relativă și mișcarea sa față de (T_0) este o mișcare absolută. Accelerația absolută de ordinul i a punctului P se va calcula cu (3). Se va calcula separat fiecare termen din membrul al doilea al acestei relații.

Accelerația relativă de ordinul i este accelerația de ordinul i a punctului P în mișcarea sa în raportul cu (T_1)

$$\bar{a}_r^{(i)} = \bar{a}_2^{(i)} + \beta_2^{(i+1)} \bar{r}_2 \tag{7}$$

în care

$$\beta_2^{(s)} = \beta_2^{(s-1)} \beta_2^{(1)} + \dot{\beta}_2^{(s-1)}, \beta_2^{(0)} = 1, \beta_2^{(1)} = \bar{\omega}_2 x \tag{8}$$

În relația (8) $(\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ este derivata locală.

Accelerația de transport de ordinul i este accelerația de ordinul i a punctului solidar cu (T_1) care coincide cu P în mișcarea sa față de (T_0).

$$\bar{a}_t^{(i)} = \bar{a}_1^{(i)} + \beta_1^{(i+1)} \bar{r}_1 \tag{9}$$

în care

$$\beta_1^{(s)} = \beta_1^{(s-1)} \beta_1^{(1)} + \dot{\beta}_1^{(s-1)}, \ \beta_1^{(0)} = 1, \beta_1^{(1)} = \bar{\omega}_1 x \tag{10}$$

$(\cdot) \equiv \frac{d}{dt}$ (derivată absolută).

Folosind (4), (5) și (6) accelerația suplimentară de ordinul i se poate calcula în acest caz cu una din formulele:

$$\bar{a}_c^{(i)} = (i+1) \beta_1^{(i)} (\bar{v}_2 + \beta_2^{(1)} \bar{r}_2) + \sum_{j=1}^{i-1} C_{i+1}^{j+1} \beta_1^{(i-1)} (\bar{a}_2^{(j)} + \beta_2^{(j+1)} \bar{r}_2) \tag{11}$$

$$\bar{a}_c^{(i)} = \dot{\bar{a}}_c^{(i-1)} + \beta_1^{(i)} (\bar{v}_2 + \beta_2^{(1)} \bar{r}_2) + \beta_1^{(1)} (\bar{a}_2^{(i-1)} + \beta_2^{(i)} \bar{r}_2) \tag{12}$$

$$\bar{a}_c^{(i)} = [1-(-1)^i]\,\beta_1^{(i)}(\bar{v}_2+\beta_2^{(i)}\bar{r}_2) + \sum_{\alpha=1}^{i-1} B_\alpha \frac{d^\alpha[\beta_1^{(i-\alpha)}(\bar{v}_2+\beta_2^{(1)}\bar{r}_2)}{dt} \tag{13}$$

Accelerația absolută de ordinul i a punctului P se obține adunînd relațiile (7) și (8) cu una din relațiile (11), (12) sau (13) :

$$\bar{a}_a^{(i)} = \bar{a}_P^{(i)} = \bar{a}_1^{(i)} + \bar{a}_2^{(i)} + \beta_1^{(i+1)}\bar{r}_1 + \beta_2^{(i+1)}\bar{r}_2 + (i+1)\,\beta_1^{(i)}(\bar{v}_2 + \beta_2^{(1)}\bar{r}_2) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} C_{i+1}^{j+1}\beta_1^{(i-1)}(\bar{a}_2^{(j)} + \beta_2^{(j+1)}\bar{r}_2) \tag{14}$$

$$\bar{a}_a^{(i)} = \bar{a}_P^{(i)} = \bar{a}_1^{(i)} + \bar{a}_2^{(i)} + \beta_1^{(i+1)}\bar{r}_1 + \beta_2^{(i+1)}\bar{r}_2 + \dot{\bar{a}}_c^{(i-1)} + \beta_1^{(i)}(\bar{v}_2 +$$

$$+ \beta_2^{(1)}\bar{r}_2) + \beta_1^{(1)}(\bar{a}_2^{(i-1)} + \beta_2^{(i)}\bar{r}_2) \tag{15}$$

$$\bar{a}_a^{(i)} = \bar{a}_P^{(i)} = \bar{a}_1^{(i)} + \bar{a}_2^{(i)} + \beta_1^{(i+1)}\bar{r}_1 + \beta_2^{(i+1)}\bar{r}_2 + [1-(-1)^i]\,\beta_1^{(i)}(\bar{v}_2 +$$

$$+ \beta_2^{(1)}\bar{r}_2) + \sum_{\alpha=1}^{i-1} B_\alpha \frac{d^\alpha[\beta_1^{(i-\alpha)}(\bar{v}_2+\beta_2^{(1)}\bar{r}_2)]}{dt^\alpha} \tag{16}$$

Făcînd pe $i=1,2,3,\ldots$ în relațiile (14), (15) și (16) se obțin valorile acceleraților absolute de ordinul 1,2,3, ... ale punctelor P aparținînd rigidului în mișcare relativă.

De exemplu, pentru $i=1$ se obține din (14)

$$\bar{a}_a^{(1)} = \bar{a}_P^{(1)} = \bar{a}_1^{(1)} + \bar{a}_2^{(1)} + \bar{\varepsilon}_1^{(1)} x\bar{r}_1 + \bar{\varepsilon}_2^{(1)} x\bar{r}_2 + \bar{\omega}_1 x(\bar{\omega}_1 x\bar{r}_1) +$$

$$+ \bar{\omega}_2(\bar{\omega}_2 x\bar{r}_2) + 2\bar{\omega}_1 x(\bar{v}_2 + \bar{\omega}_2 x\bar{r}_2) \tag{17}$$

S-a obținut în (17) un rezultat găsit în [1] și [2]. Același rezultat se obține dacă se face $i=1$ în relațiile (15) sau (16).

Făcînd pe $i=2$ în relația (15) se obține

$$\bar{a}_a^{(2)} = \bar{a}_P^{(2)} = \bar{a}_1^{(2)} + \bar{a}_2^{(2)} + \beta_1^{(3)}\bar{r}_1 + \beta_2^{(3)}\bar{r}_2 + \dot{\bar{a}}_c^{(1)} + \beta_1^{(2)}(\bar{v}_2 +$$

$$+ \beta_2^{(1)}\bar{r}_2) + \beta_1^{(1)}(\bar{a}_2^{(1)} + \beta_2^{(2)}\bar{r}_2) \tag{18}$$

Se vor calcula separat termenii din membrul al doilea ai relației (18) :

$$\beta_1^{(3)}\bar{r}_1 = \bar{\varepsilon}_1^{(2)} x\bar{r}_1 + 2\bar{\varepsilon}_1^{(1)} x(\bar{\omega}_1 x\bar{r}_1) + \bar{\omega}_1 x(\bar{\varepsilon}_1^{(1)} x\bar{r}_1) + \bar{\omega}_1 x[\bar{\omega}_1 x(\bar{\omega}_1 x\bar{r}_1)]$$

$$\beta_2^{(3)}\bar{r}_2 = \bar{\varepsilon}_2^{(2)} x\bar{r}_2 + 2\bar{\varepsilon}_2^{(1)} x\,(\bar{\omega}_2 x\bar{r}_2) + \bar{\omega}_2 x\,(\bar{\varepsilon}_2^{(1)} x\bar{r}_2) + \bar{\omega}_2 x\,[\bar{\omega}_2 x\,(\bar{\omega}_2 x\bar{r}_2)]$$

$$\bar{a}_c^{(1)} = 2\bar{\omega}_1 x\bar{v}_r = 2\bar{\omega}_1 x\,(\bar{v}_2 + \bar{\omega}_2 x\bar{r}_2)$$

$$\dot{\bar{a}}_c^{(1)} = 2\bar{\varepsilon}_1^{(1)} x\,(\bar{v}_2 + \bar{\omega}_2 x\bar{r}_2) + 2\bar{\omega}_1 x\,\{\bar{a}_2^{(1)} + \bar{\omega}_1 x\bar{v}_2 + [\bar{\varepsilon}_2^{(1)} +$$

$$+ \bar{\omega}_1 x\bar{\omega}_2]\,x\bar{r}_2 + \bar{\omega}_2 x\,[(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2)x\bar{r}_2]\}$$

$$\beta_1^{(2)}\,(\bar{v}_2 + \beta_2^{(1)}\bar{r}_2) = \beta_1^{(2)}\,(\bar{v}_2 + \bar{\omega}_2 x\bar{r}_2) = \bar{\varepsilon}_1^{(1)} x\,(\bar{v}_2 + \bar{\omega}_2 x\bar{r}_2) +$$

$$+ \bar{\omega}_1 x\,[\bar{\omega}_1 x\,(\bar{v}_2 + \bar{\omega}_2 x\bar{r}_2)]$$

$$\beta_1^{(1)}\,(\bar{a}_2^{(1)} + \beta_2^{(2)}\bar{r}_2) = \beta_1^{(1)}\;[\bar{a}_2^{(1)} + \bar{\varepsilon}_2^{(1)} x\,\bar{r}_2 + \bar{\omega}_2 x\,(\bar{\omega}_2 x\bar{r})\,] =$$

$$= \bar{\omega}_1 x\,[\bar{a}_2^{(1)} + \bar{\varepsilon}_2^{(1)} x\bar{r}_2 + \bar{\omega}_2 x\,(\bar{\omega}_2 x\bar{r}_2)\,]$$

Introducînd aceste valori în (18) se obține relația de calcul a accelerației absolute de ordinul doi a unui punct P aparținînd unui rigid în mișcare relativă.

$$\bar{a}_a^{(2)} = \bar{a}_P^{(2)} = \bar{a}_1^{(2)} + \bar{a}_2^{(2)} + \bar{\varepsilon}_1^{(2)} x\bar{r}_2 + \bar{\varepsilon}_2^{(2)} x\bar{r}_2 + 2\,\bar{\varepsilon}_1^{(1)} x\,(\bar{\omega}_1 x\bar{r}_1) +$$

$$+ 2\bar{\varepsilon}_2^{(1)} x\,(\bar{\omega}_2 x\bar{r}_2) + \bar{\omega}_1 x\,(\bar{\varepsilon}_1^{(1)} x\bar{r}_1) + \bar{\omega}_2 x\,(\bar{\varepsilon}_2^{(1)} x\bar{r}_2) + \bar{\omega}_1 x\,[\bar{\omega}_1 x\,(\bar{\omega}_1 x\bar{r}_1)\,] +$$

$$+ \bar{\omega}_2 x\,[\bar{\omega}_2 x\,(\bar{\omega}_2 x\bar{r}_2)\,] + 2\bar{\varepsilon}_1^{(1)} x\,(\bar{v}_2 + \bar{\omega}_2 x\bar{r}_2) + 2\bar{\omega}_1 x\,\{\bar{a}_2^{(1)} + \bar{\omega}_1 x\bar{v}_2 +$$

$$+ \bar{\varepsilon}_2^{(1)} + \bar{\omega}_1 x\bar{\omega}_2]\,x\bar{r}_2 + \bar{\omega}_2 x\,[(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2)x\bar{r}_2]\} +$$

$$+ \bar{\varepsilon}_1^{(1)} x\,(\bar{v}_2 + \bar{\omega}_2 x\bar{r}_2) + \bar{\omega}_1 x\,[\bar{\omega}_1 + (\bar{v}_2 + \bar{\omega}_2 x\bar{r}_2)\,] +$$

$$+ \bar{\omega}_1 x\,[\bar{a}_2^{(1)} + \bar{\varepsilon}_2^{(1)} x\bar{r}_2 + \bar{\omega}_2 x\,(\bar{\omega}_2 x\bar{r}_2)\,] \qquad (19)$$

3. În cazul mai multor triedre mobile (T_1), (T_2), ..., (T_n), ultimul (T_n) fiind legat de corpul în mișcare relativă, formulele (14), (15) și (16) pot fi generalizate. Se va generaliza în cele ce urmează formula (15).

Se presupun cunoscute (fig. 2) din punct de vedere al distribuțiilor accleerațiilor de ordinul 1,2, ..., i mișcările triedrelor (T_j) în raport cu (T_{j-1}), $(j=1,2, \ldots$ ..., $n)$, caracterizate prin parametrii cinematici $\bar{v}_{0j} = \bar{v}_j$, $\bar{a}_{0j}^{(1)} = \dot{\bar{v}}_{0j}$, $\bar{a}_0^{(2)} =$ $= \ddot{\bar{v}}_{0j}, \ldots, \bar{a}_{0j}^{(i)} = \bar{a}_j^{(i)} = \overset{(i)}{\bar{v}}_{0j}, \bar{\omega}_j, \bar{\varepsilon}_j^{(1)} = \dot{\bar{\omega}}_j, \bar{\varepsilon}_j^{(2)} = \ddot{\bar{\omega}}_j, \ldots, \bar{\varepsilon}_j^{(i)} = \overset{(i)}{\bar{\omega}}_j$, $((^i)) \equiv$ $\equiv \dfrac{\partial^i}{\partial t^i}$ este derivată locală în raport cu triedrul (T_{j-1}).

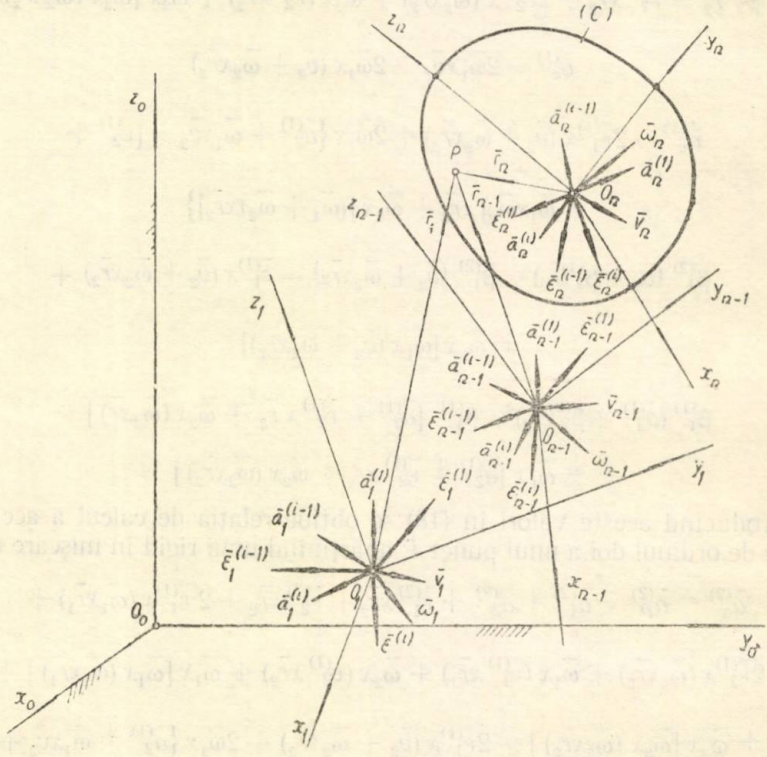


Fig. 2.

Pentru determinarea acceleraţiei absolute de ordinul i a unui punct P aparţinînd rigidului în mişcare relativă se procedează analog cu cazul acceleraţiilor de ordinul întîi tratat în [1].

Se presupune că în cazul a $(n-1)$ triedre mobile se obţine acceleraţia de ordinul i absolută a punctului P care se va nota cu $\bar{a}_{P_{n-1}}^{(i)}$. Luînd încă un triedru (T_n), acceleraţia de ordinul i $\bar{a}_{P_{n-1}}^{(i)}$ determinată mai sus poate fi considerată pentru noua mişcare ca fiind acceleraţia de ordinul i de transport, Pentru a se obţine acceleraţia absolută de ordinul i a punctului P $\bar{a}_{P_n}^{(i)} = \bar{a}_P^{(i)}$, se va adăuga la acceleraţia de ordinul i de transport $\bar{a}_{P_{n-1}}^{(i)}$ acceleraţia relativă de ordinul i $\bar{a}_{r_n}^{(i)}$ şi acceleraţia de ordinul i suplimentară $\bar{a}_{c_n}^{(i)}$.

Acceleraţia relativă de ordinul i va fi acceleraţia de ordinul i a punctului P în mişcarea sa faţă de triedrul (T_{n-1}).

$$\bar{a}_{r_n}^{(i)} = \bar{a}_n^{(i)} + \beta_n^{(i+1)}\,\bar{r}_n \tag{20}$$

în care

$$\beta_n^{(s)} = \beta_n^{(s-1)}\beta_n^{(1)} + \dot{\beta}_n^{(s-1)},\ \beta_n^{(0)} = 1,\ \beta_n^{(1)} = \bar{\omega}_n x \tag{21}$$

În (21) $(\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ este derivată locală în raport cu triedrul (T_{n-1}).

Acceleraţia suplimentară de ordinul i a punctului P, folosind (12), va fi

$$\bar{a}_{c_n}^{(i)} = \dot{\bar{a}}_{c_n}^{(i-1)} + \beta_{\Sigma_n}^{(i)}\bar{v}_r + \beta_{\Sigma_n}^{(1)}\bar{a}_{r_n}^{(i-1)} \tag{22}$$

în care

$$\beta_{\Sigma_n}^{(s)} = \beta_{\Sigma_n}^{(s-1)}\beta_{\Sigma_n}^{(1)} + \dot{\beta}_{\Sigma_n}^{(s-1)},\ \beta_{\Sigma_n}^{(0)} = 1,\ \beta_{\Sigma_n}^{(1)} = \Big(\sum_{j=1}^{n-1}\bar{\omega}_j\Big)x \tag{23}$$

În (23) $(\cdot) \equiv \frac{d}{dt}$ este derivată absolută în raport cu triedrul (T_0).

Folosind (20) şi (22) se obţine acceleraţia absolută de ordinul i a punctului P

$$\bar{a}_{P_n}^{(i)} = \bar{a}_P^{(i)} = \bar{a}_{P_{n-1}}^{(i)} + \bar{a}_n^{(i)} + \beta_n^{(i+1)}\bar{r}_n + \dot{\bar{a}}_c^{(i-1)} + \beta_{\Sigma_n}^{(i)}(\bar{v}_n + \beta_n^{(1)}\bar{r}_n) +$$

$$+ \beta_{\Sigma_n}^{(1)}(\bar{a}_n^{(i-1)} + \beta_n^{(i)}\bar{r}_n) \tag{24}$$

Făcînd în formula (24) succesiv $n = 1,2,\ldots,n$ şi adunînd, se obţine

$$\bar{a}_{P_n}^{(i)} = \bar{a}_P^{(i)} = \sum[\bar{a}_j^{(i)} + \beta_j^{(i+1)}\bar{r}_j + \dot{\bar{a}}_{c_j}^{(i-1)} + \beta_{\Sigma_j}^{(i)}(\bar{v}_j + \beta_j^{(1)}\bar{r}_j) +$$

$$+ \beta_{\Sigma_t}^{(1)}(\bar{a}_j^{(i)} + \beta_j^{(i)}\bar{r}) \tag{25}$$

Formula (24) permite determinarea acceleraţiei absolute de ordinul i a unui punct P aparţinînd unui rigid în cazul existenţei mai multor triedre mobile.

Pentru determinarea acceleraţiilor unghiulare absolute de ordinul 2,3, ..., se va pleca de la expresiile vitezei unghiulare absolute şi acceleraţiile unghiulare absolute de ordinul întîi deduse în [1] şi [2].

$$\bar{\omega} = \sum_{j=1}^{n}\bar{\omega}_j \tag{26}$$

$$\bar{\varepsilon}^{(1)} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\bar{\varepsilon}_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{j-1}\bar{\omega}_j\Big)x\bar{\omega}_j \tag{27}$$

Prin derivarea absolută în raport cu timpul a relației (27) se deduce expresia accelerației unghiulare absolute de ordinul doi

$$\bar{\varepsilon}^{(2)} = \frac{d^2\bar{\omega}}{dt^2} = \sum_{j=1}^{n} \bar{\varepsilon}_j^{(2)} + 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j-1}\bar{\omega}_k\right)x\bar{\varepsilon}_j^{(1)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{j-1}\left[\bar{\varepsilon}_k^{(1)} + \left(\sum_{l=1}^{k-2}\bar{\omega}_l\right)x\bar{\omega}_k\right\}x\bar{\omega}_j + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j-1}\bar{\omega}_k\right)x\left[\left(\sum_{k=1}^{j-1}\bar{\omega}_k\right)x\bar{\omega}_j\right]\right. \quad (28)$$

În continuare se poate determina accelerația unghiulară absolută de ordinu 3,4 ...,

Cu ajutorul relațiilor (26,) (27) și (28) se pot calcula operatorii $\beta_{\Sigma_n}^{(0)}$, $\beta_{\Sigma_n}^{(1)}$, $\beta_{\Sigma_n}^{(2)}$, $\beta_{\Sigma_n}^{(3)}$:

$$\beta_{\Sigma_n}^{(0)} = 1$$

$$\beta_{\Sigma_n}^{(1)} = \left(\sum_{j=1}^{n-1}\bar{\omega}_j\right)x$$

$$\beta_{\Sigma_n}^{(2)} = \beta_{\Sigma_n}^{(1)}\beta_{\Sigma_n}^{(1)} + \dot{\beta}_{\Sigma_n}^{(1)} = \left(\sum_{j=1}^{n-1}\bar{\omega}_j\right)x\left[\left(\sum_{j=1}^{n-1}\bar{\omega}_j\right)x\right] + \left[\sum_{j=1}^{n-1}\bar{\varepsilon}_j^{(1)} +\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{j-1}\bar{\omega}_k\right)x\bar{\omega}_j\right]x$$

$$\beta_{\Sigma_n}^{(3)} = \beta_{\Sigma_n}^{(2)}\beta_{\Sigma_n}^{(1)} + \dot{\beta}_{\Sigma_n}^{(2)}$$

Făcînd pe $i=1$ în relația (25) se obține:

$$\bar{a}_{P_n}^{(1)} = \bar{a}_P^{(1)} = \sum_{j=1}^{n}\left[\bar{a}_j^{(1)} + \bar{\varepsilon}_j^{(1)}x\bar{r}_j + \bar{\omega}_j x(\bar{\omega}_j x\bar{r}_j) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j-1}\bar{\omega}_k\right)x(\bar{v}_j + \bar{\omega}_j x\bar{r}_j)\right. \quad (29)$$

Relația (29) este identică cu relația dedusă în [1] pentru accelerațiile de ordinul întîi.

Se poate proceda analog făcînd pe $i=2,3,\ldots$ în relația (25) obținîndu-se expresiile accelerației absolute de ordinul 2,3,... a punctului P aparținînd rigidului în mișcare relativă.

BIBLIOGRAFIE

[1] R. Voinea: Distribuţia acceleraţiilor în mişcare relativă, Studii şi cercetări de Mecanică aplicată, nr. 4, 1957.

[2] V. Vâlcovici, St. Bălan, R. Voinea: *Mecanică teoretică*, Editura Tehnică, 1963.

[3] Gh. Silaş, L. Brîndeu: Asupra compunerii acceleraţiilor de ordin superior în mişcarea relativă. Bul. Şt. şi Tehnic al I.P. Timişoara. Seria Mat.-Fiz.-Mec. teor. şi apl., tom. 17 (31), fasc. 1, 1972.

[4] C. Burali-Forti, Stato cinetico ; moto infinitesimo ; teorema di Coriolis, Atti dell'Accademia delle Sci. di Torino, 60, 1925.

[5] A. Ripianu: C. Tudosie: Asupra mişcării relative, Buletinul Institutului Politehnic Cluj nr. 5, 1962.

[6] F. Ianik: Ruch wielokratnie Wzgledny, Archiwum Budowy Maszyn, XI, nr. 2, 1964.

К ОТНОСИТЕЛЬНОМУ ДВИЖЕНИЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА

(РЕЗЮМЕ)

В работе определяются расчетные соотношения абсолютных ускорений некоторого порядка точек принадлежащих твердому телу в относительном движении, в случае одного подвижного ограничителя или нескольких таких ограничителях.

ON THE SOLID-RIGID RELATIVE MOTION

(SUMMARY)

In this paper we determine the calculation relationship of certain order absolute accelerations of points belonging to rigide body in relative motion in the case of a single mobile system as well as in the case of more mobile systems.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖNYVTÁR
1948

F14 14

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIŞOARA

SERIA

MATEMATICA — FIZICA — MECANICA TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

Tomul 17 (31) Fascicola 2

IULIE — DECEMBRIE
1972